# Geometria 29/3/17

Dati $V$ su $\mathbb{K}$ e $f: V \to V$ lin cerchiamo $\mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia "facile" (diagonale). Oppure:

→ data $A = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0} \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$

↳ data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$ vista come $A: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$

cerchiamo $M$ t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M$ sia "facile"

Def: $\lambda \in \mathbb{K}$ autovalore se $\exists v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

Vicbo (1) gli autovalori sono le radici del pol. caratteristico $p_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$.

(2) Se $A$ è diago allora $p_A(t)$ ha $n$ radici con molteplicità

(3) Se $p_A(t)$ ha $n$ radici distinte

(con molt. 1) allora $A$ è diag.

Q: cosa accade se ci sono $n$ radici ma non distinte?

Def: se $\lambda$ è autovalore chiamo:

- molteplicità algebrica m.a.($\lambda$) la sua molt. come radice di $p_A(t)$

- molteplicità geometrica $m.g.(\lambda) = \dim\left(\ker(\lambda I_n - A)\right)$

$= \dim\{v : A \cdot v = \lambda v\}$

autospazio di $A$ relativo a $\lambda$

= "tutti gli autovettori rel a $\lambda$ e $0$"

$\underline{\mathcal{E}_S}$: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-3 & 2 \\ -2 & t+1 \end{pmatrix} = t^2 - 2t - 3 + 4$

$= t^2 - 2t + 1 = (t-1)^2$

C'è solo l'autovalore $\lambda = 1$ con m.a. $= 2$;

m.g. $\dim \ker \left( 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \right) =$

$$= \dim \ker \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 2 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= 2 - 1 = 1$$

---

Teorema: (a) per ogni autovalore $\lambda$ si ha

$$1 \leq \text{m.g.}(\lambda) \leq \text{m.a.}(\lambda)$$

(b) $A$ è diagonalizzabile se e solo se ha $n$ radici in $\mathbb{K}$ con molt. e per

Ciascuno di esse si ha che $m.g. = m.a.$

Dim: ($\Rightarrow$) $\lambda$ autoval

$\Rightarrow \det(\lambda I_n - A) = 0 \Rightarrow \ker(\lambda I_n - A) \neq \{0\}$

$\Rightarrow m.g.(\lambda) \geq 1$.

Sia $k = m.g.(\lambda)$; sceglo $v_1, \dots, v_k$ base di $\ker(\lambda I_n - A)$ e la completo a $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{B}^{-1} \cdot A \cdot \mathcal{B} = \left(\begin{array}{cc|c} \lambda & & * \\ & \ddots & \\ & \lambda & \\ \hline 0 & & * \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \\ \} k \end{matrix}$$

$$([f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{k}$$

$$\Rightarrow P_A(t) = \det \left(\begin{array}{cc|c} t-\lambda & & * \\ & \ddots & \\ & t-\lambda & \\ \hline 0 & & * \end{array}\right)$$

$$\overset{=}{\text{ESE}} \det \begin{pmatrix} t-\lambda & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda \end{pmatrix} \cdot \det(*)$$

$$= (t-\lambda)^k \cdot q(t)$$

$\Longrightarrow$ $m.a.(\lambda) \geq k$.

(b) ovvio: dopo $\Longrightarrow$ $n$ radici con $m.a. = m.g.$

$$B^{-1} A \cdot B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

$n$ radici con $m.a. = m.g.$ $\Longrightarrow$

(analogamente al caso di autoval. distinti)

tenendo conto che prendendo basi dei vari autospazi ottengo vett lin. ind.

ma ce ne sono $= \sum m.p. = \sum m.o. = n$

$\Rightarrow$ sono base di $V$. ∎

Come vedere se $f$ o $A$ è diagonalizzabile?

0. Trovo $A = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$

1. Calcolo $P_A(t) = \det(t \cdot I_n - A)$

2. Cerco le sue radici.

3. Se $K = \mathbb{C}$ avanti; se $K = \mathbb{R}$ vediamo che se ne hanno $n$ con molt. (se no: non diago).

4. Se tutte hanno m.a. $= 1$ è diago

5. Controllo che per quelle con m.a. $> 1$ si abbia che m.g. $= \dim \ker(f I_n - A)$

$= n - \operatorname{rank}(\lambda I_n - A)$

è uguale a m.a. : se sì per tutti è diag., se no, non diag.

<u>Oss</u> : se A ha un solo autovalore è diagonalizzabile solo se è già diagonale!

infatti se $M^{-1} \cdot A \cdot M = \lambda \cdot I_n$ allora

$$A = M \cdot \lambda I_n \cdot M^{-1} = \lambda \cdot M \cdot M^{-1} = \lambda \cdot I_n.$$

Dimmo per $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, lasciato che ha solo l'autoval 1 concludo che non è diag.

---

**Teo spettrale** (versione reale):

Ogni $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica ammette una base ortonormale di autovettori:

(cioè $\exists M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ortogonale, ovvero ${}^tM \cdot M = I_n$, t.c.

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

E viceversa –

Dim: provo prima che

A diag. via ortogonali $\Rightarrow$ simmetrica;

anzi provo che:

se $\exists M$ ortogonale t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M = B$

è simmetrica allora $A$ è simmetrica

(è un fatto più forte):

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = B \Rightarrow A = M \cdot B \cdot M^{-1} = M \cdot B \cdot {}^tM$$

$$\Rightarrow {}^tA = {}^t({}^tM) \cdot {}^tB \cdot {}^tM = M \cdot B \cdot {}^tM.$$

Viceversa:

Passo 1: vediamo che $A$ ha almeno un autovalore reale (anzi: vediamo che

tutti sono reali).

Sia $\lambda \in \mathbb{C}$ una radice di $p_A(t)$;
è un autoval. complesso $\Rightarrow \exists\, z \in \mathbb{C}^n, z \neq 0,$
t.c $A \cdot z = \lambda \cdot z$;

$$\langle Az | z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle \lambda z | z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \lambda \cdot \|z\|^2_{\mathbb{C}^n}$$

$$\| \quad$$

$$\langle z | A^* z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle z | {}^t\overline{A} z \rangle_{\mathbb{C}^n} = \langle z | Az \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$\langle z | \lambda z \rangle_{\mathbb{C}^n}$$

$$\overline{\lambda} \cdot \|z\|^2_{\mathbb{C}^n}$$

$$\Longrightarrow \quad \lambda = \overline{\lambda} \quad \Longrightarrow \quad \lambda \text{ reale} .$$

Passo 2: conclusione per induzione su $n$.

$n = 1$ ok

$n > 1$ prendo $\lambda_1$ un autovalore (Pass. 1) e un relativo autovettore $v_1$ unitario; completo a una base $U_1$ ortonormale di $\mathbb{R}^n$ ($^t U_1 \cdot U_1 = I_n$); ho:

$$ {}^t U_1 \cdot A \cdot U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & w_1 \\ 0 & \\ \vdots & A_1 \\ 0 & \end{pmatrix}. $$

Per quanto visto all'inizio della dimo, la

${}^t U_1 \cdot A \cdot U_1$ è simmetrica

$\Rightarrow w_1 = 0$ e $A_1 \in M_{(n-1)\times(n-1)}$

è simmetrica

Per induzione esiste $U_2$ ortogonale t.c.

$${}^tU_2 \cdot A_1 \cdot U_2 = \begin{pmatrix} \lambda_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$ e allora:

$$\underbrace{{}^t\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^tU_2 \end{pmatrix} \cdot {}^tU_1}_{{}^tU} \cdot A \cdot \underbrace{U_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}}_{U} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & 0 \\ & 0 & \ddots \lambda_n \end{pmatrix}$$

$${}^tU \cdot U = I_n.$$

$\blacksquare$

Dimo alternativa del Passo 1 (A simm. ha almeno un autovalore reale).

Ricordo:

1) una funz. continua su un intervallo chiuso e limitato ammette max e min

2) per una funz. derivabile in un pto $\overline{x}$ di max o min interno (non di bordo) allora la derivata prima fa 0.

Considero $A$ simmetrica:

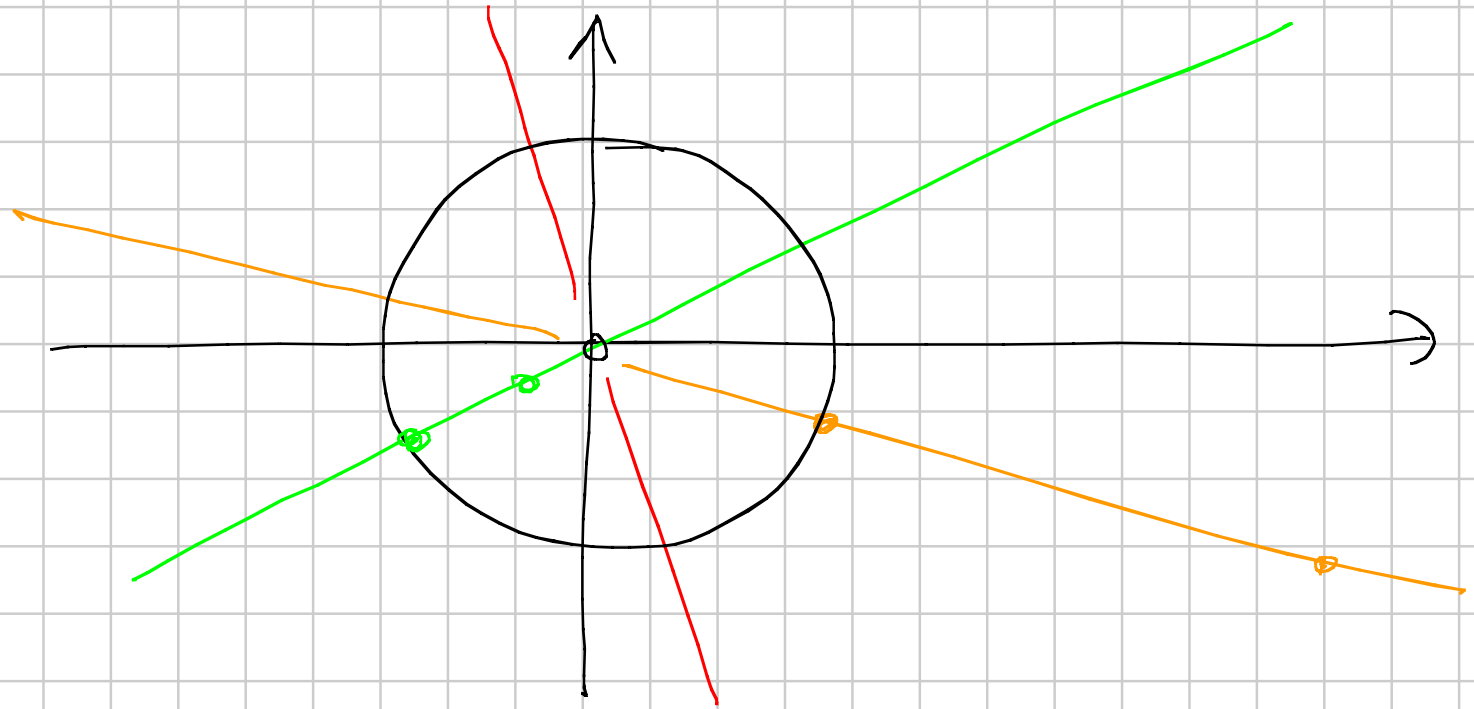
$$f: \mathbb{R}^4 \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{\langle Ax \mid x \rangle}{\|x\|^2}$$

Proprietà:

1) $f(\lambda \cdot x) = \dfrac{\langle A\lambda x \mid \lambda x \rangle}{\|\lambda x\|^2} = \dfrac{\lambda^2 \cdot \langle Ax \mid x \rangle}{\lambda^2 \cdot \|x\|^2} = f(x)$

$\Rightarrow$ $f$ è costante sulle rette per $O$ :



se $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ ho che i valori assunti da $f$ su $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sono gli stessi assunti su $S^{n-1}$; ma $S^{n-1}$ è chiuso e limitato e $f$ è continua su di lui $\Longrightarrow$ $f$ ha max e min (come per $[a,b]$)

2) $f$ ammette derivate direzionali ovunque,

dunque se $x$ è pto di max o min

ho $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0 \quad \forall k$ . (Mai usato $+A = A$.)

Calcolo $\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = 0$ in un punto $x$ in cui

$f$ assume un max o min $\lambda$:

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}\right)$$

$$= \frac{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \left( \delta_{ik} x_j + x_i \delta_{jk} \right) \cdot \|x\|^2 - 2x_k \langle Ax | x \rangle}{\|x\|^4}$$

$$= \frac{\left( \sum_{i=1}^{n} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik} x_i \right) - 2x_k \frac{\langle Ax | x \rangle}{\|x\|^2}}{\|x\|^2}$$

$f(x) = 1$

uguali fra loro perché $A$ è simmetrica

$$= \frac{2}{\|x\|^2} \left( \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j}_{(A \cdot x)_k} - \lambda x_k \right)$$

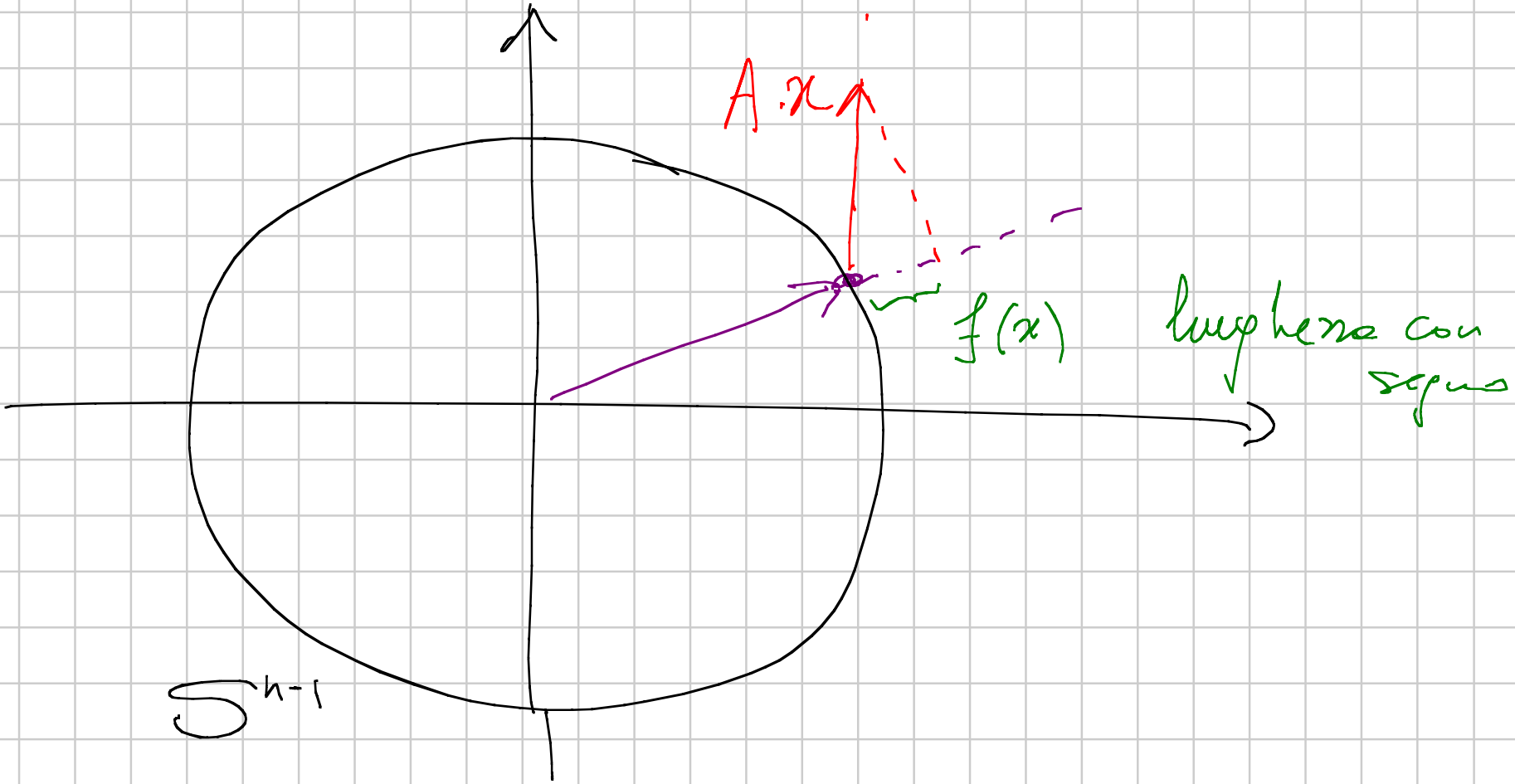
so che fa 0

$$\Rightarrow A \cdot x = \lambda \cdot x$$

Dunque un pto $x$ in cui $f(x) = \dfrac{\langle Ax(x) \rangle}{\|x\|^2}$

assume max/min $\lambda$ è un

autovettore di $A$ rispetto all'autovalore $\lambda$.


A·x
f(x)
luogo dove cade
$S^{n-1}$

Ricordo: vista

- ogni appl. bil. su $\mathbb{R}^4$ è del tipo

$$\langle \cdot | \cdot \rangle_A \qquad A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$$

$$\langle x | y \rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot y$$

- $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ simm $\Longleftrightarrow$ $A$ simm

Q: per quali $A$ simm. $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos?

Prop: data $A$ simm.

$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è def. pos. $\iff$ $A$ ha tutti gli autovalori positivi.

Dim: Sappiamo che $A$ è diagonalizzabile, cioè $\exists M$ t.c. ${}^t\overline{M} \cdot M = I_n$ e $M^{-1} A M = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_n \end{pmatrix}$

$\langle . | . \rangle_A$ def. pos

$\Longleftrightarrow \quad \langle x | x \rangle_A > 0 \qquad \forall x \neq 0$

$\Longleftrightarrow \quad \langle My | My \rangle_A > 0 \qquad \forall y \neq 0 \quad (M \text{ surjective})$

$\Longleftrightarrow \quad {}^t(My) \cdot A \cdot (My) > 0 \qquad \forall y \neq 0$

$\Longleftrightarrow \quad {}^t y \cdot {}^t M \cdot A \cdot M \cdot y > 0 \qquad \forall y \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \quad {}^t y \cdot M^{-1} A \cdot M \cdot y > 0 \qquad \forall y \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad {}^t y \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \cdot y > 0 \qquad \forall y \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 > 0 \qquad \forall y \neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0. \qquad \blacksquare$$

Pb: Data una $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simm con $n \geq 3$ trovare gli autovalori può essere difficile.

Algoritmo:

Data $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ simmetrica

chiamo $A_k$ la sua sottomatrice $k\times k$ in alto a sx; pongo $d_k = \det(A_k)$.

**Prop:** $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ é def. pos.

$\iff d_1, \dots, d_n > 0$ .

**Exemplo:** 9.17 (e)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad x^2 + 5y^2 + 2z^2 - 4xy + 2xz + 6yz$$

$d_1 = 1 > 0$ ✓

$d_2 = 5 - 4 > 0$ ✓

$d_3 = 10 - 6 - 6 - 5 - 8 - 9 < 0$ №

7) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

$d_1 = 1 > 0$ $d_2 = 1 > 0$

$$d_3 = 10 + 6 + 6 - 5 - 8 - 9 = 0$$ Не

(4) $$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 5$ $d_2 = 11$

$$d_3 = 165 - 12 - 12 - 27 - 44 - 20 > 0$$

Да

Dimostro un fatto più generale che implica la Proposizione:

Teo: sia $A$ simmetrica; pongo

$d_0 = 1$, $d_k = \det(A_k)$ $\quad k = 1, \dots, n$.

Supposo che $d_1, \dots, d_{n-1}$ siano $\neq 0$.

Allora i segni degli autovalori di $A$ sono i segni di $d_1/d_0, d_2/d_1, \dots, d_m/d_{m-1}$.

Esempi:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare autovalori:

$$\det \begin{pmatrix} t-2 & -3 & 4 \\ -3 & t-1 & -5 \\ 4 & -5 & t \end{pmatrix} = t^3 \dots$$

+ risolvere

Segni degli autovalori:

$d_1 = 2 > 0$ $\quad \lambda_1 > 0$

$d_2 = 2 - 9 < 0$ $\quad \lambda_2 < 0$

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 3 & 1 & 5 \\ -4 & 5 & 0 \end{pmatrix} = -186$$

$$\Delta_3 > 0$$

Segni autovalori: $+, +, -$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

con il cambio di base $e_2, e_1, e_3$

ottengo $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -4 \\ 2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

e ho $d_1 > 0 \quad d_2 < 0 \quad d_3 = \dots$

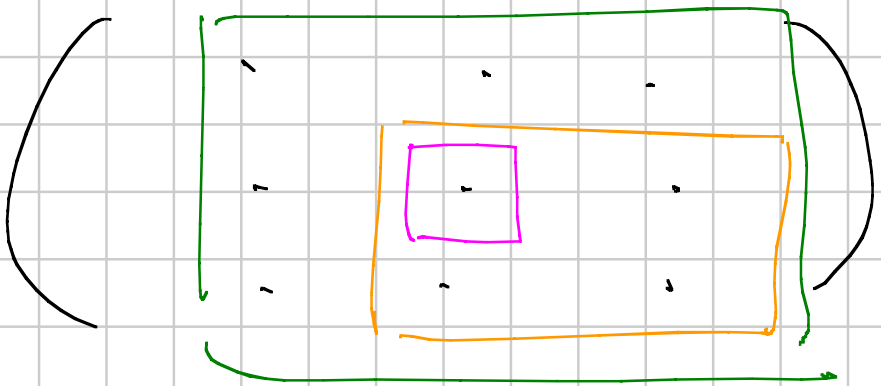
oppure con $e_3, e_2, e_1$ ho

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 2 \\ -4 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 5 > 0$
$d_2 = -1 < 0$ .
$d_3 = \dots$

Morale: invece che prendere $A_1, \dots, A_n$ come appoggi in alto a sx ascendi basta prendere matrici $1\times 1, 2\times 2, \dots, n\times n$

due abbiamo diag. princ. sulla diag. princ. di A:

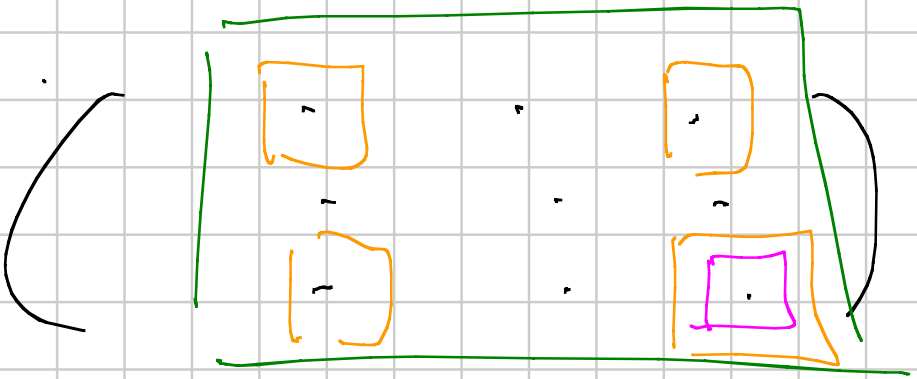


$d_1$

$d_2$

$d_3$

oppure



Es:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 1 > 0$

$d_2 = -1 < 0$

$d_3 = -6 - 6 - 4 - 9 < 0$

$+, -, +$