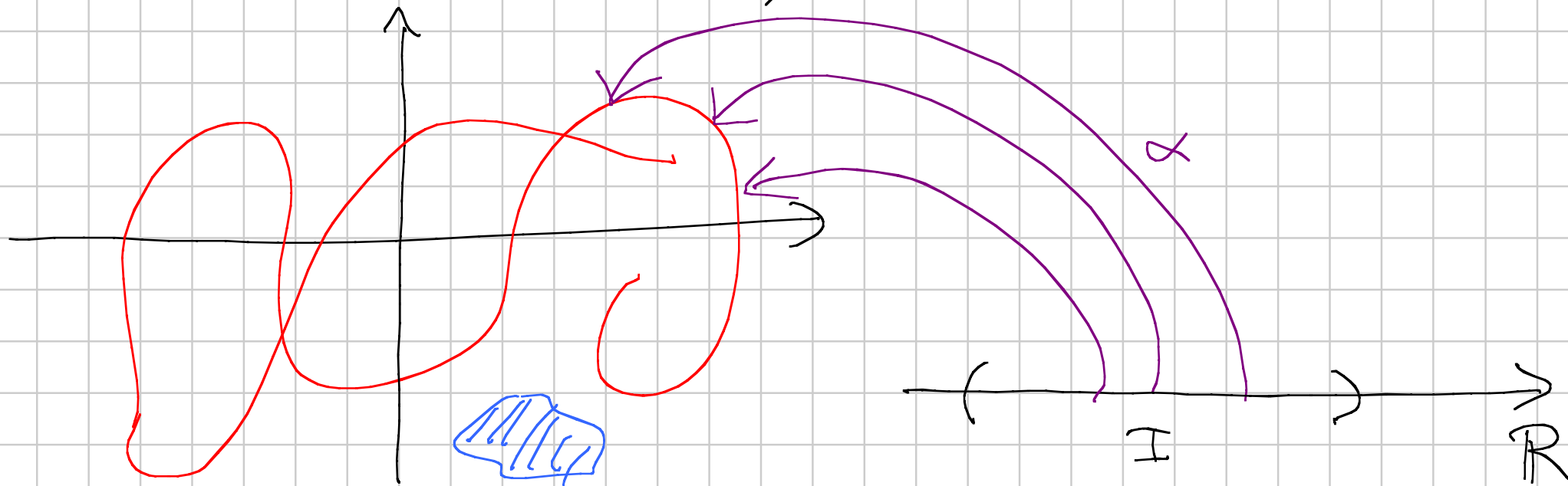


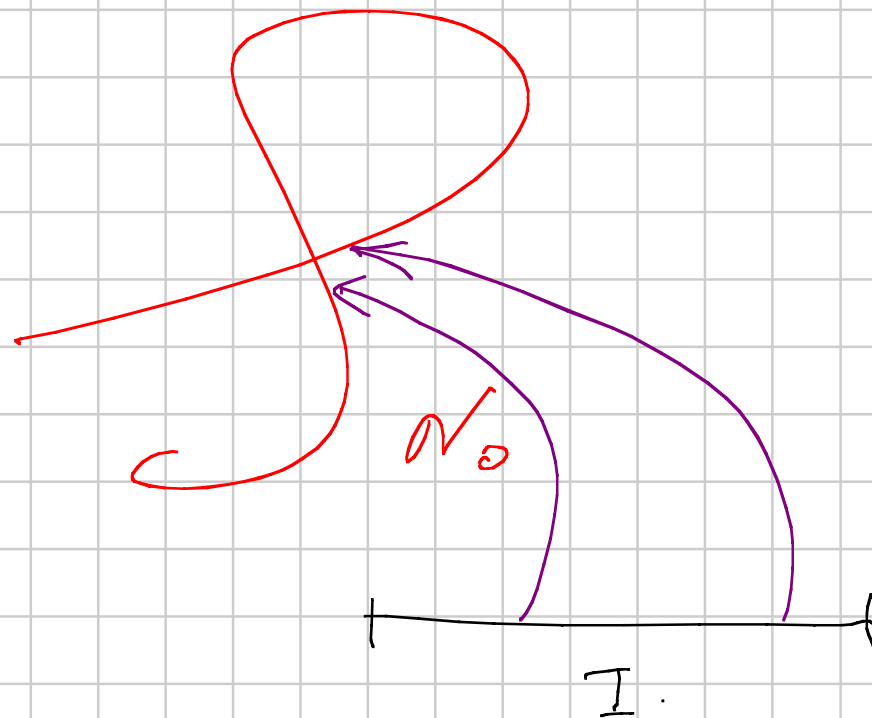
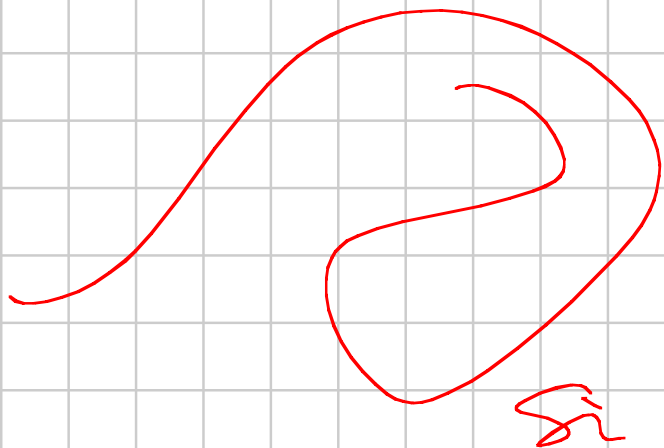
Geometrie 10/5/17

Curve in $\mathbb{R}^2$ ($\circ \mathbb{R}^3$)

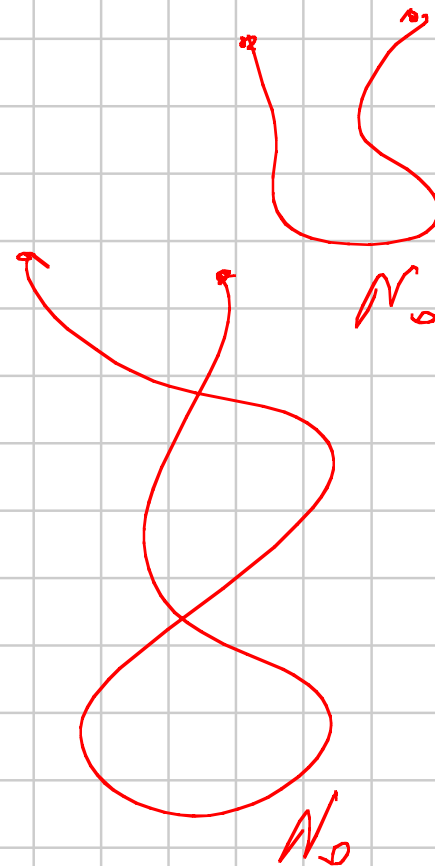
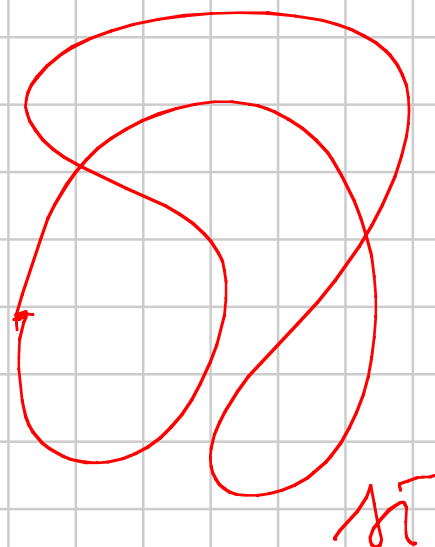
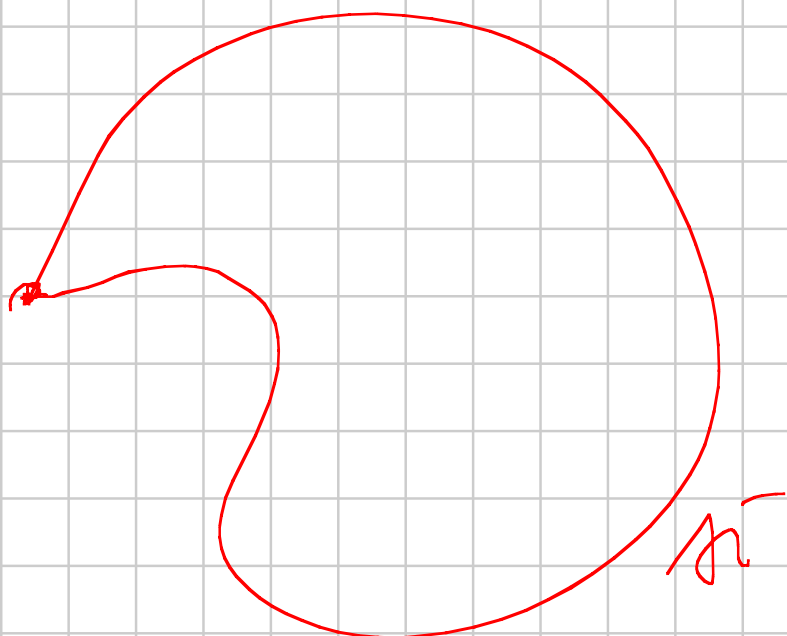


Def: chiamo curve parametrizzate in $\mathbb{R}^n$ una funzione $\alpha: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ con $I \subset \mathbb{R}$ intervallo ($I = \mathbb{R}, [a, b], (a, b), [a, b), (-\infty, b] \dots$) con le componenti di α molto derivabili (1, 2, 3 volte) -

Def: chiamo α semplice se è iniettiva:

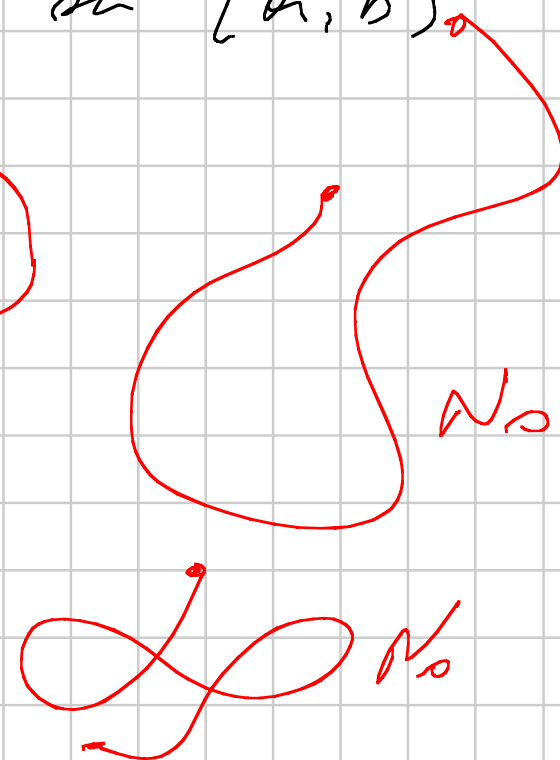
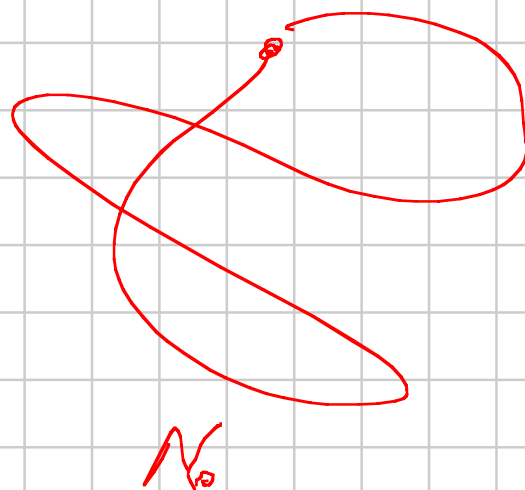
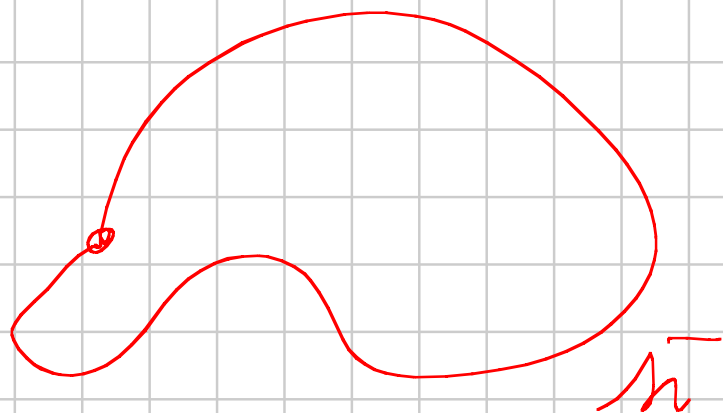


chiamo $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ curva se
 $\alpha(a) = \alpha(b)$



$\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\bar{e}$ simple & dense α

$\alpha(a) = \alpha(b)$ α $\bar{e}$ injective on $[a, b)$



Ci interessano le curve "lisce" cioè dotate in
ogni pto di retta tangente:



Q5: on veut dire que α ne derivable
pas avec la tangente:

$$\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \alpha(t) = \begin{cases} (t^{1000}, 0) & t \leq 0 \\ (0, t^{1000}) & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\alpha'(t) = \begin{cases} (1000t^{999}, 0) & t < 0 \\ (0, 1000t^{999}) & t > 0 \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^{\pm}} \alpha'(t) = (0, 0)$$



$$\exists \alpha'(0) = (0, 0)$$

(auch α ist definiert 999 Volte)

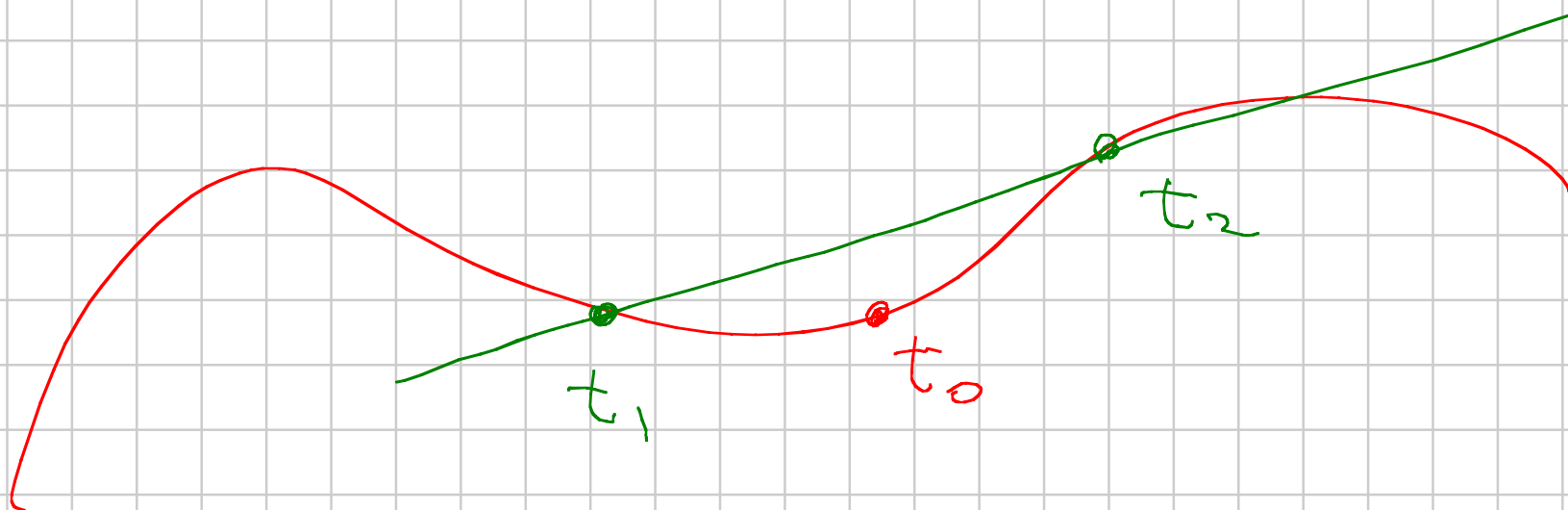


Def: chiamo α regolare se $\alpha'(t) \neq 0 \quad \forall t \in I$.

Prop: se α è regolare allora ammette in ogni punto una retta tangente, cioè una retta avente duplice contatto con l'immagine di α .

lo definisco nella
dimostrazione

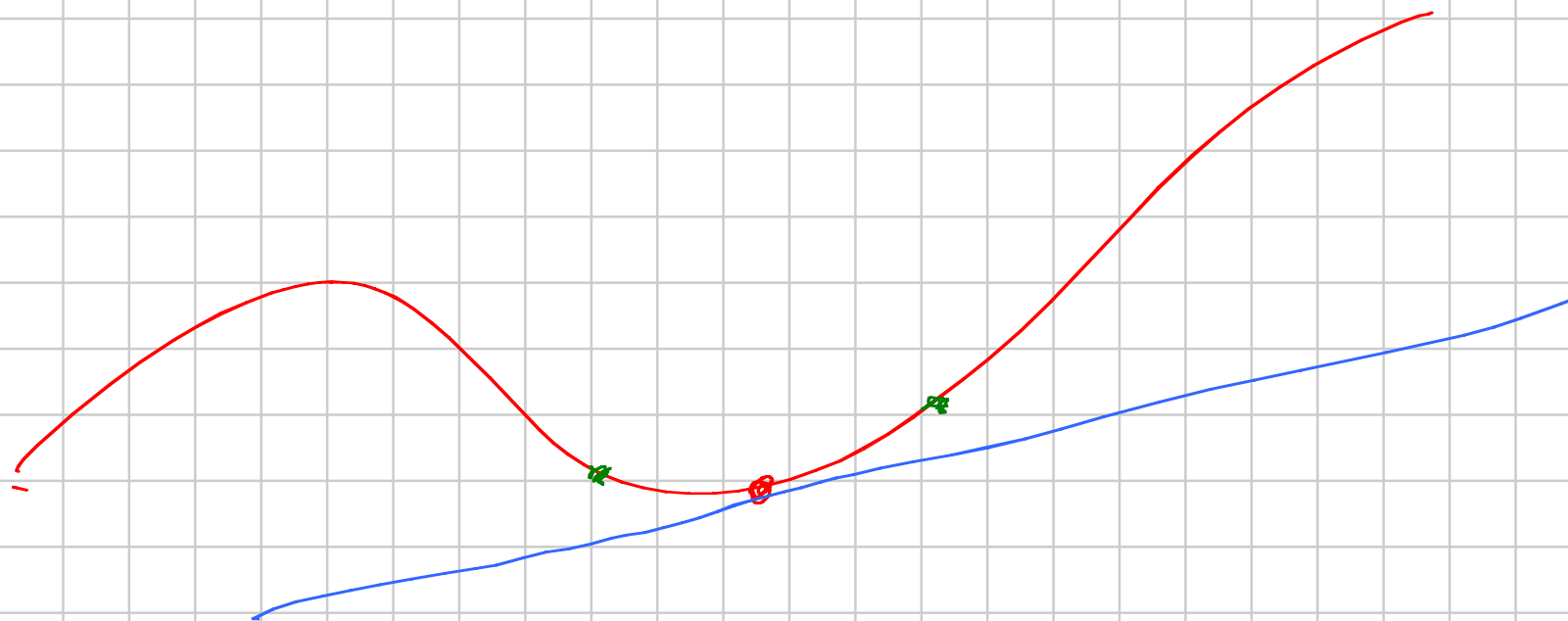
La tangente è la retta per $\alpha(t_0)$ con direz. $\alpha'(t_0)$



t_1, t_2 vicini a t_0 ; $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$

$\Rightarrow$ esiste unica retta per $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$

$\lim_{t_1, t_2 \rightarrow 0}$ (for some)



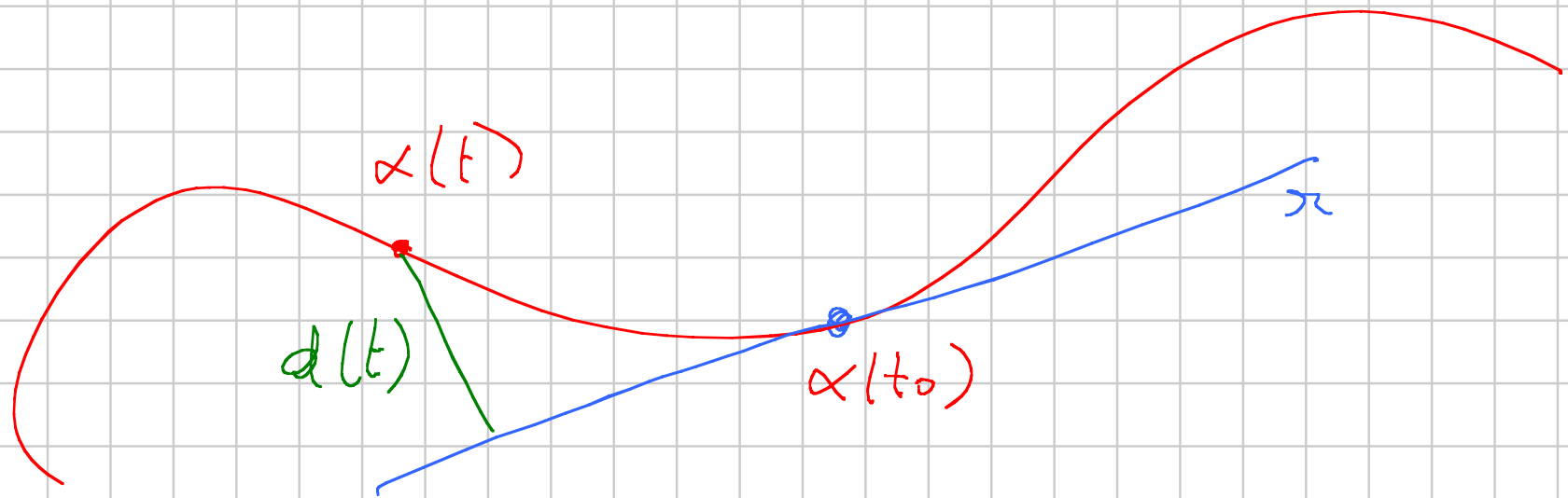
Dim: retta per $\alpha(t_1)$ e $\alpha(t_2)$ e'

$$\alpha(t_1) + \text{Span}(\alpha(t_2) - \alpha(t_1))$$

$$= \alpha(t_1) + \text{Span}\left(\frac{\alpha(t_2) - \alpha(t_1)}{t_2 - t_1}\right)$$

$$\xrightarrow{t_1, t_2 \rightarrow 0} \alpha(t_0) + \text{Span}(\alpha'(t_0))$$

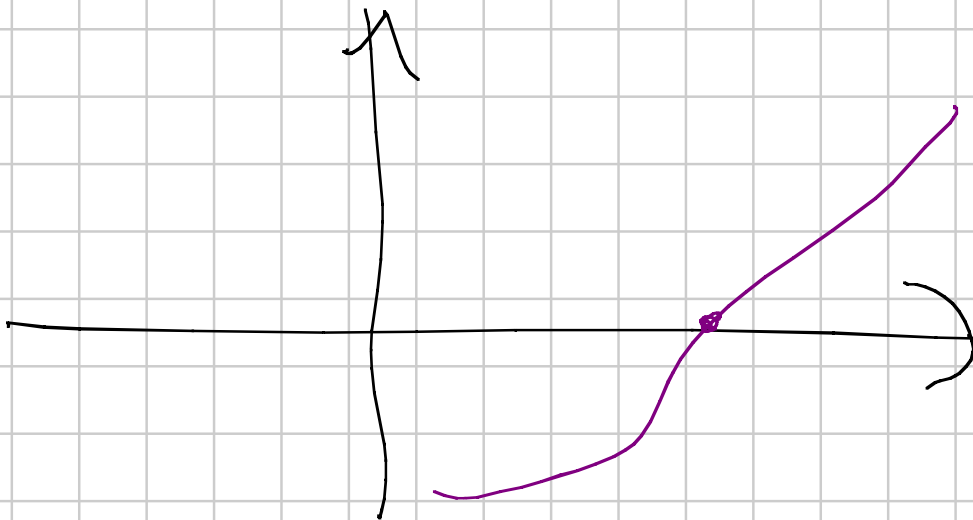
Per $n=2$: duplica controllo.



Per qualsiasi x tangente da $x(t_0)$ ho $d(t_0) = 0$

(π has contacto simple con α in $\alpha(t_0)$;

contacto duplice $\alpha'(t_0) = 0$



Per $m=2$ verifichiamo che in effetti
l'unica retta per cui $d'(t_0) = 0$ è
quella con diret. $\alpha'(t_0)$.

$$a: \quad ax + by + c = 0$$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}.$$

$$d(t) = \frac{|a \cdot x(t) + b \cdot y(t) + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$d(t_0) = 0 \leadsto c$ in funzione di a, b

$$d'(t_0) = \left(\sqrt{(aX(t) + bY(t) + c)^2} \right)'$$

$$= \frac{2(aX + bY + c)}{2 \sqrt{(aX + bY + c)^2}} \cdot (aX'(t) + bY'(t))$$

$\pm 1 \quad (\text{per } t \neq t_0)$

$\lim_{t \rightarrow t_0} d'(t) = 0$ accade solo se

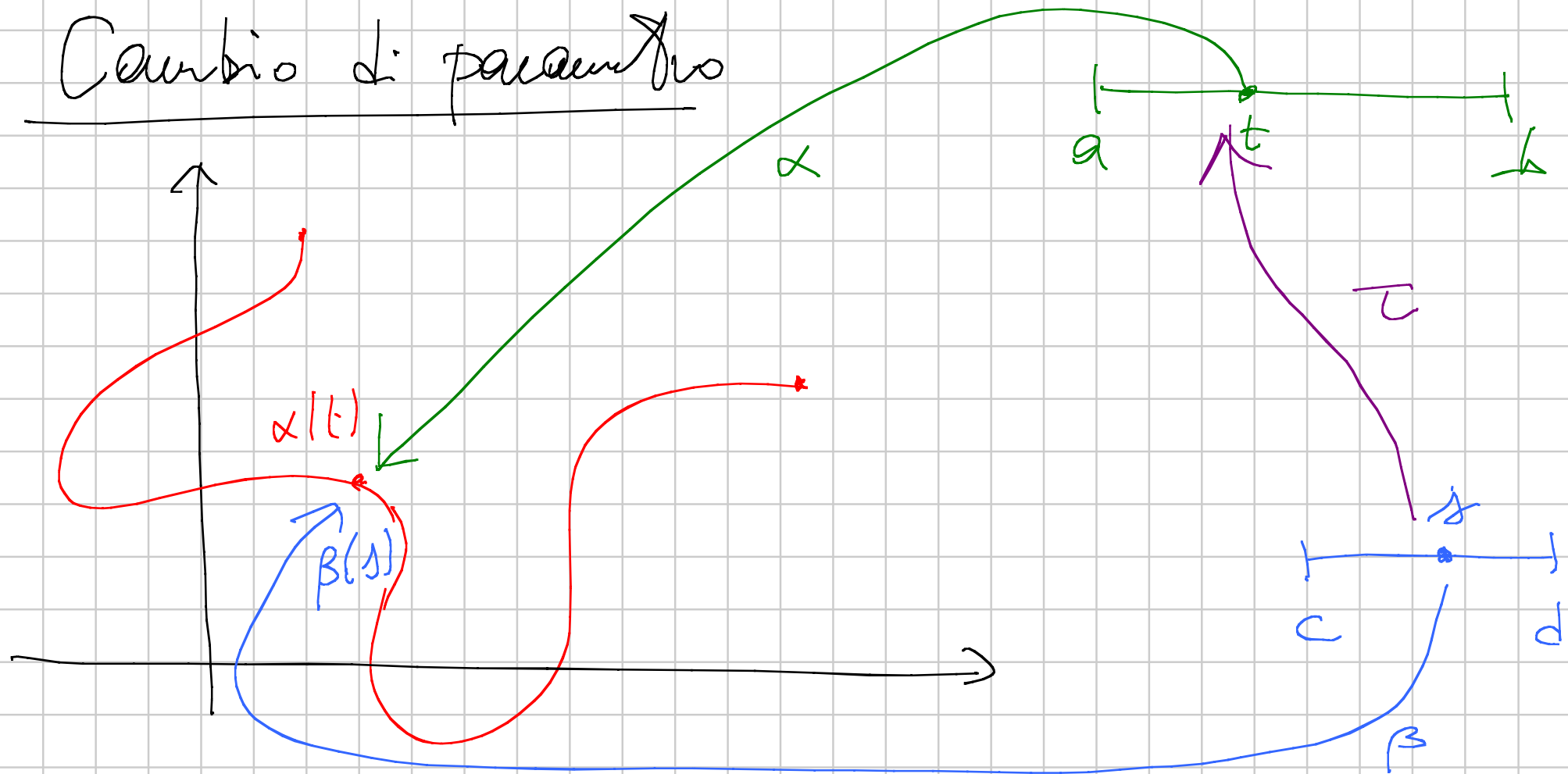
$$a X'(t_0) + b Y'(t_0) = 0$$

cioè se l'equazione $ax + by = 0$ definisce

la retta con direzione $\begin{pmatrix} X'(t_0) \\ Y'(t_0) \end{pmatrix} = \alpha'(t_0)$.



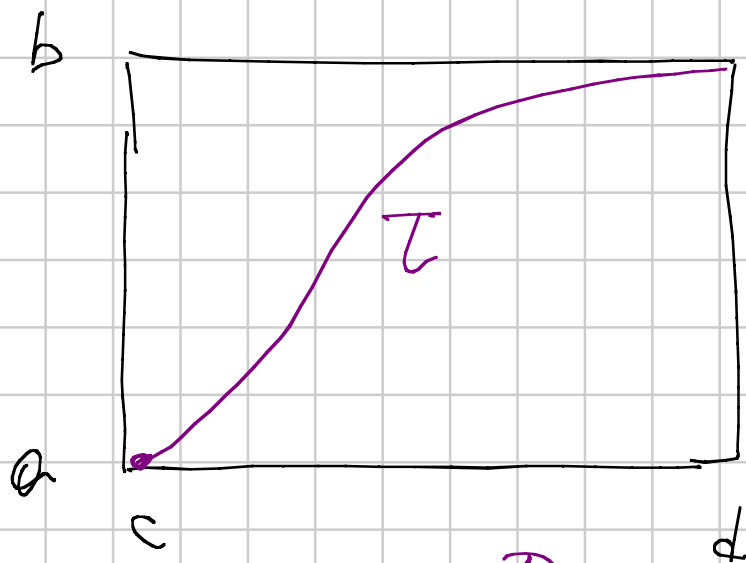
Cambio di parametro



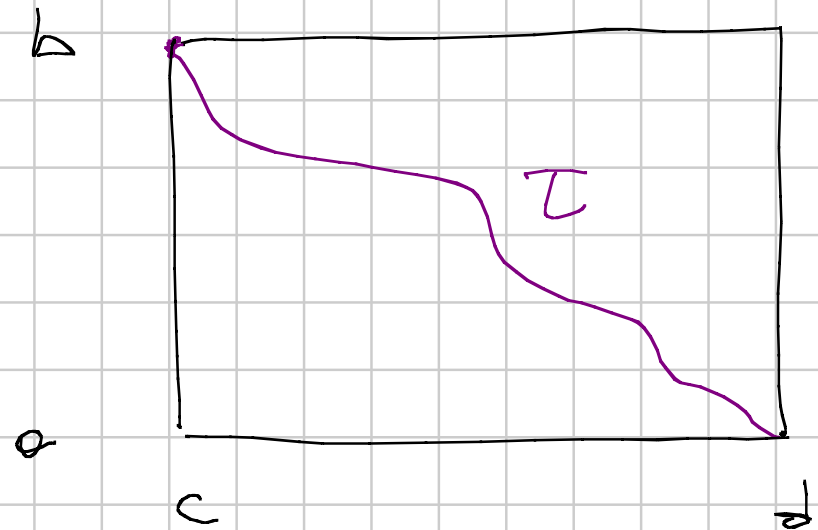
Dico che $\beta: [c,d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ è ottenuta da $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^n$
 tramite cambio di parametro e esiste $\tau: [c,d] \rightarrow [a,b]$
 bigettiva l.c. $\beta = \alpha \circ \tau$ cioè

$$\beta(t) = \alpha(\tau(t)) \quad \forall t \in [c,d].$$

Oss: In tal caso $\text{Im}(\alpha) = \text{Im}(\beta)$.
 Inoltre $\alpha = \beta \circ \tau^{-1}$. In fine, ci sono
 due possibilità:

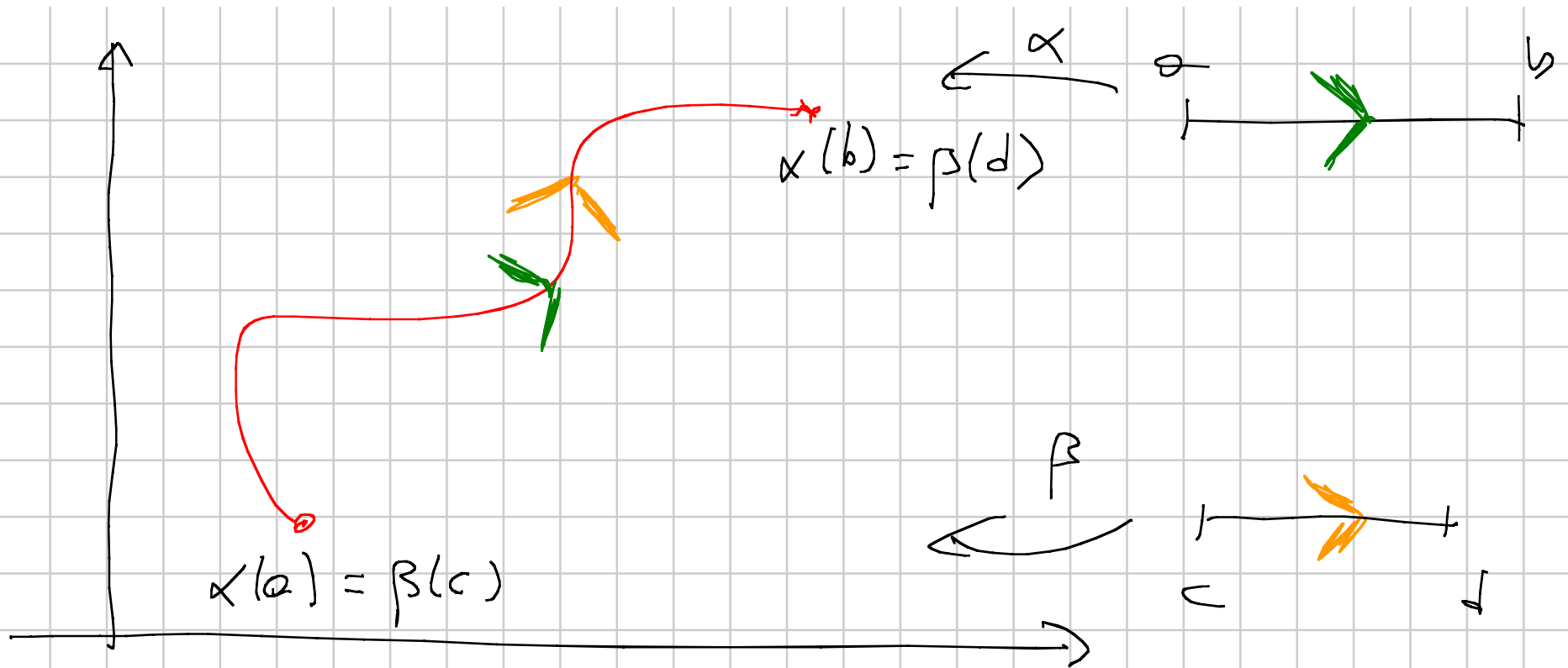


crescente



de crescente

CASO CRESCENTE



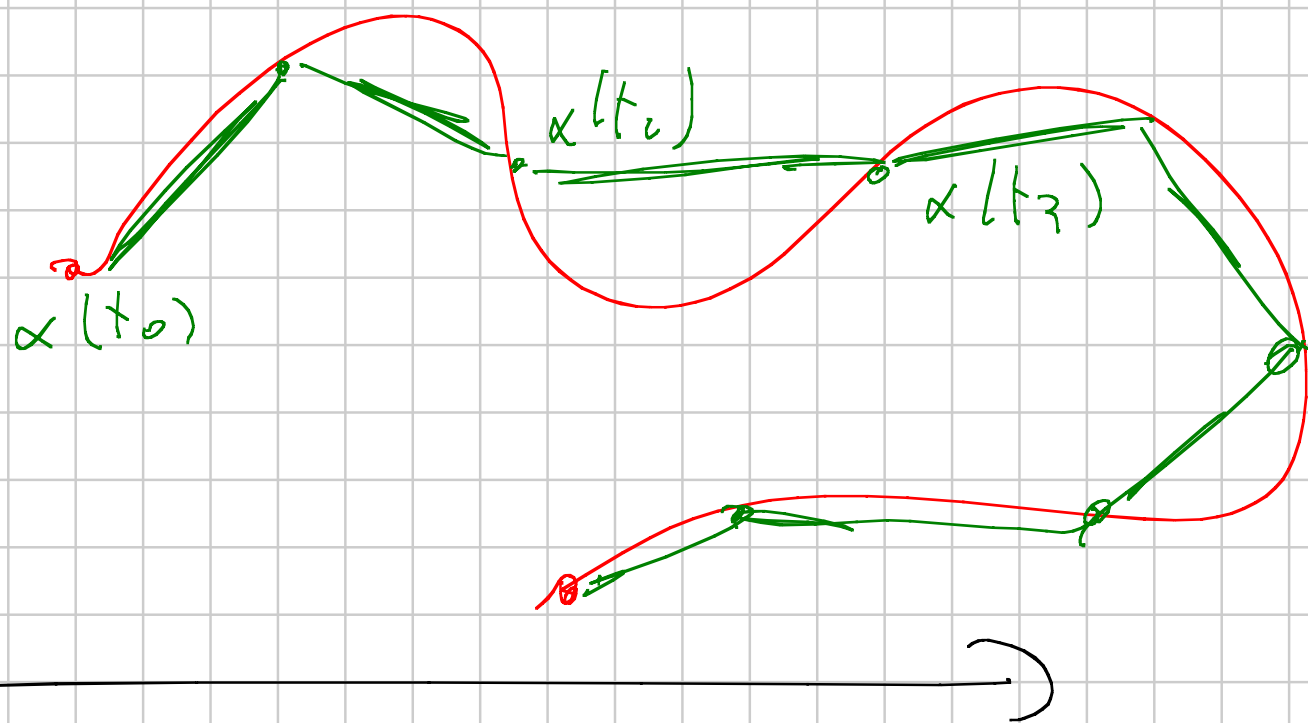
definiscono lo stesso verso sulle curve.

(n e τ è decrescente all'indietro nel tempo).

Def: chiamo curve orientate una
curve con verso fissato.

Per le curve orientate considero solo
parametrizzazioni compatibili col verso;
i cambi di parametro sono allora
quelli con τ crescente.

Lumphezze : $x(t_1)$



Prendo una suddivisione "fine"

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = b$$

Le lunghezze delle sottopartizioni τ

$$\sum_{i=0}^{N-1} \|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)\|$$

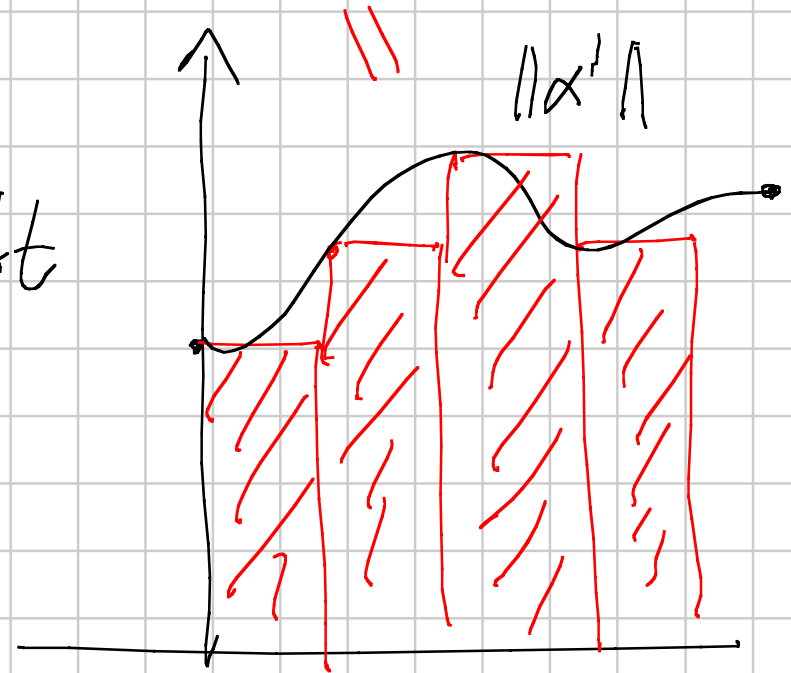
Ona

$$\alpha(t_{i+1}) \cong \alpha(t_i) + \alpha'(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$\Rightarrow \text{length. spez.} \approx \sum_{i=0}^{n-1} \|x'(t_i)\| \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

lim
suddividono
sempre più
fine

$$= \int_a^b \|x'(t)\| dt$$



Def: $L(\alpha) = \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt$

Prop: se β è ottenuto da α per
cambio di parametro allora $L(\beta) = L(\alpha)$.

Dim: $\beta = \alpha \circ \tau \quad \beta' = (\alpha' \circ \tau) \cdot \tau'$

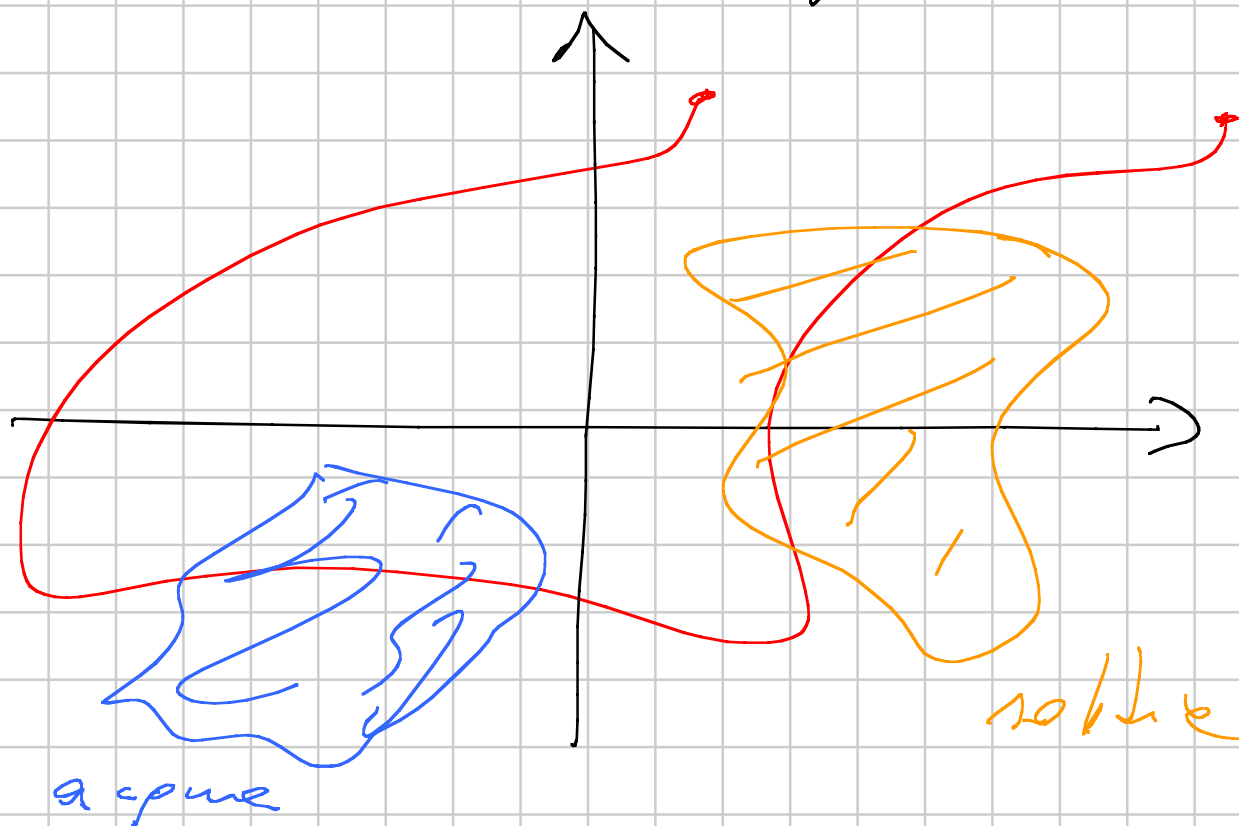
$$\Rightarrow L(\beta) = \int_c^d \underbrace{\|\alpha'(\underbrace{\tau(s)}_t)\|}_{dt} \cdot \underbrace{|\tau'(s)|}_{dt} ds$$

$$t = \tau(s)$$

$$= \int_a^b \|\alpha'(t)\| dt = L(\alpha).$$



Generalizziamo la legge:



costo di permeazione dell'elemento inferiore
di lunghezza lungo $\propto$ più dipendere dal punto.

costo infinitesimo: $\underbrace{f(\alpha(t))}_{\text{coeff.}} \cdot \underbrace{\|\alpha'(t)\| dt}_{\text{el. d. l.}} \underbrace{\quad}_{\text{lungh.}}$

costo totale: $\int_a^b f(x(t)) \cdot \|x'(t)\| dt$ ✓

Def: Se $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è una funz. continua
chiamo

$$\int_{\alpha}^b f = \int_{\alpha}^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt$$

Prop: non cambio se cambio parametro.

Def: dico che α è in parametro d'arco
se $\|\alpha'(t)\| \equiv 1$ cioè se α è la legge
di percorrenza con velocità unitaria.

Prop: Per ogni α esiste un cambio
di parametro che è in parametro d'arco.

Dim: Posto $\sigma(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$

$$\sigma : [a, b] \rightarrow [0, L] \quad L = L(\alpha)$$

$\sigma'(t) > 0$ croissante bijective.

Pour $\tau = \sigma^{-1} : [0, L] \rightarrow [a, b]$

$$\beta = \alpha \circ \tau.$$

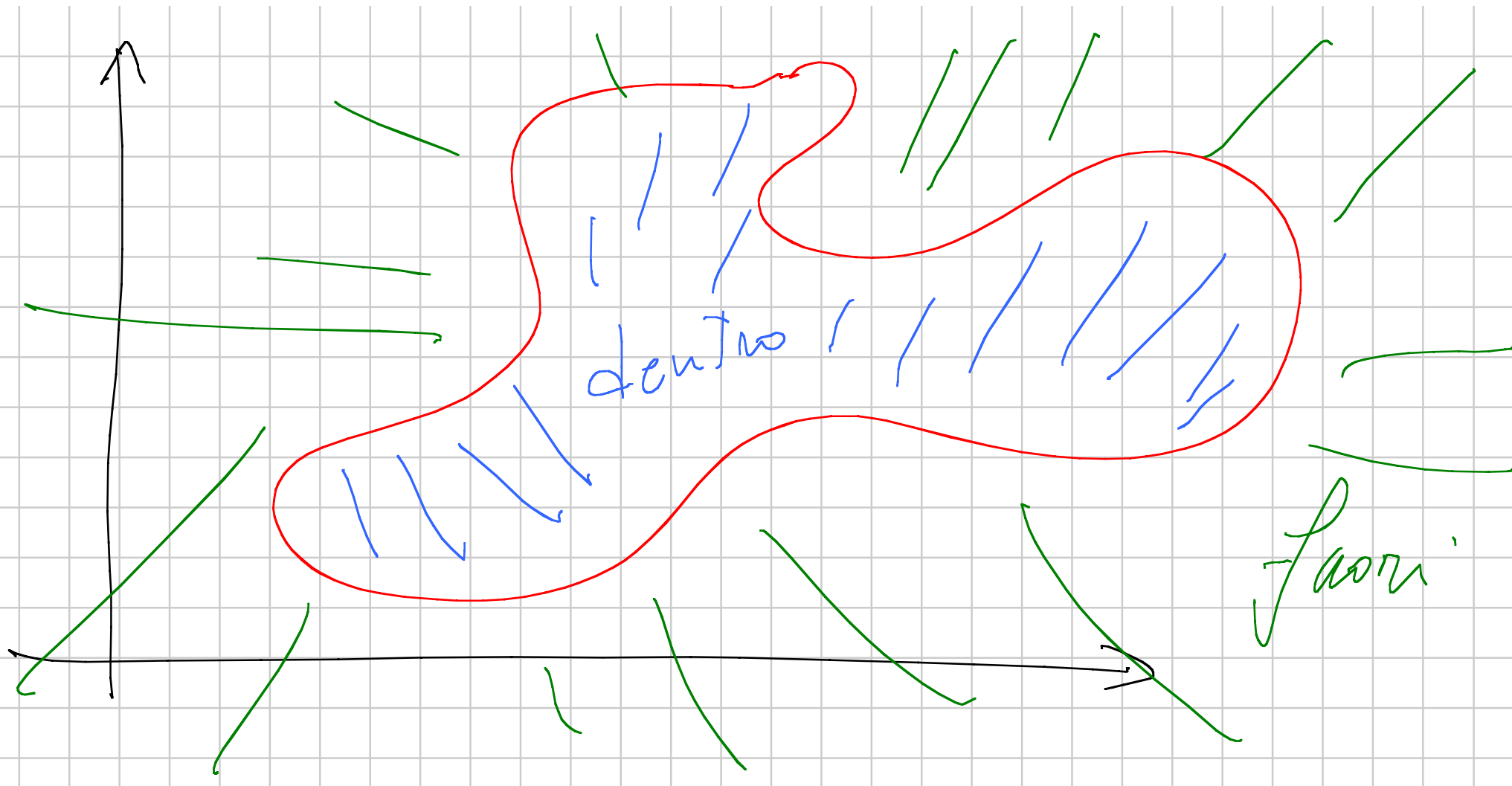
$$\begin{aligned} \beta' &= (\alpha \circ \sigma^{-1})' = (\alpha' \circ \sigma^{-1}) \cdot (\sigma^{-1})' \\ &= (\alpha' \circ \sigma^{-1}) \cdot \frac{1}{\sigma' \circ \sigma^{-1}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\alpha' \circ \sigma^{-1}}{\|\alpha' \circ \sigma^{-1}\|}$$

$$\Rightarrow \|\beta'\| = 1.$$



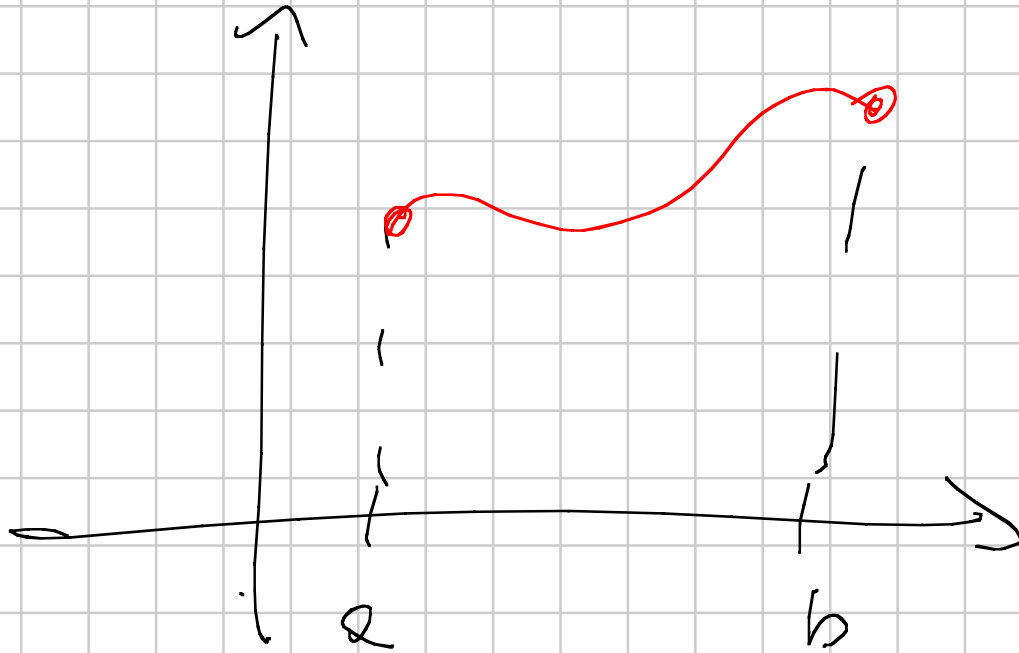
_____ o _____



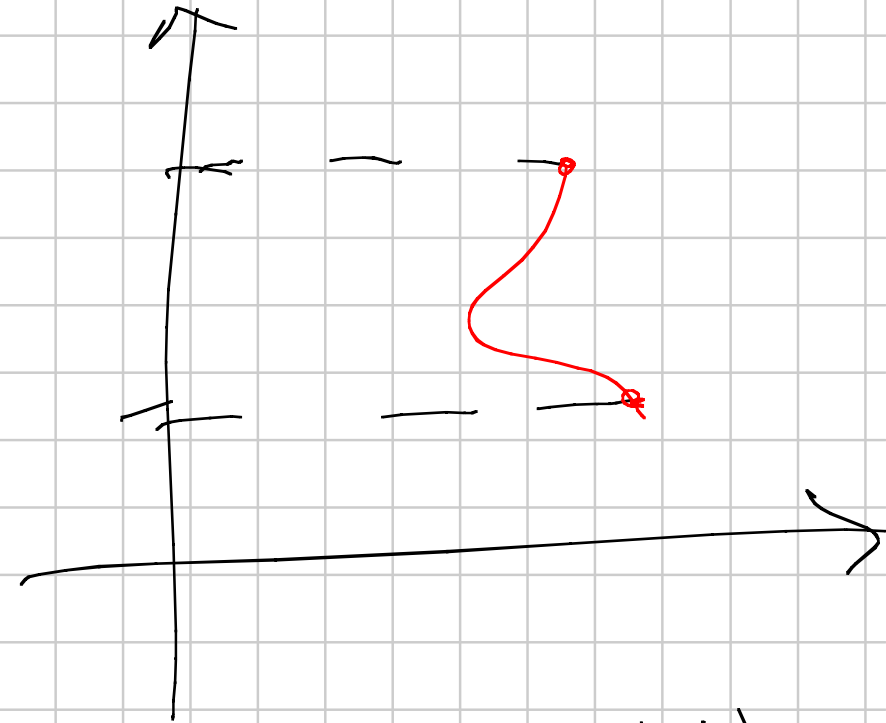
Teo (Jordan): $\alpha \subset \mathbb{R}^2$ curve semplice e
chiusa $\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \alpha$ consiste di due regioni
di cui una limitata.



Obs: il grafico di una funzione
 $y = X(x)$ oppure $x = X(y)$ è
sempre una curva:

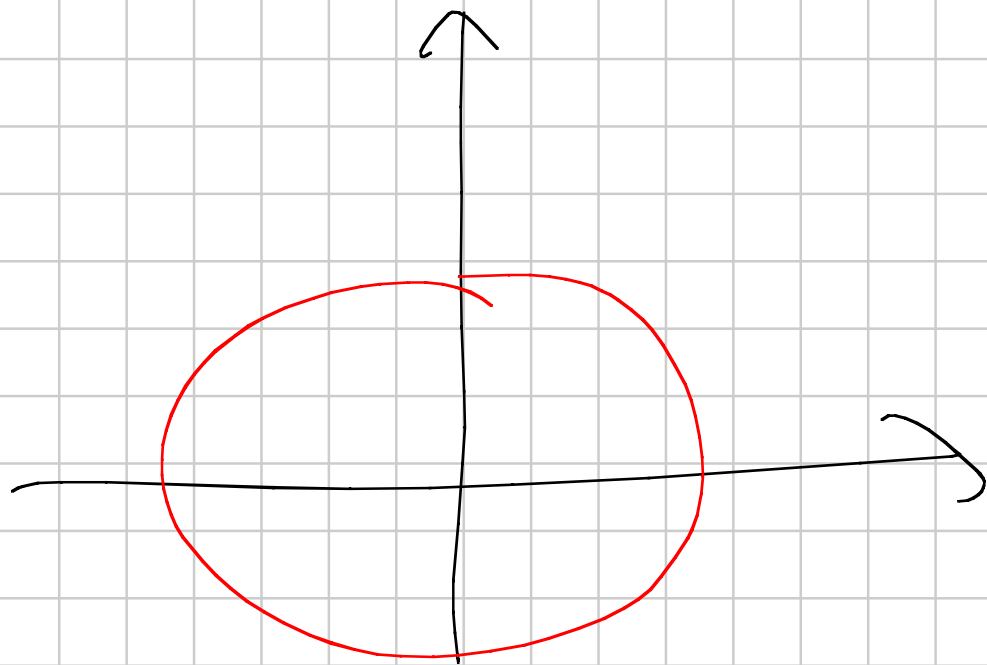


$$\alpha(t) = (t, Y(t))$$



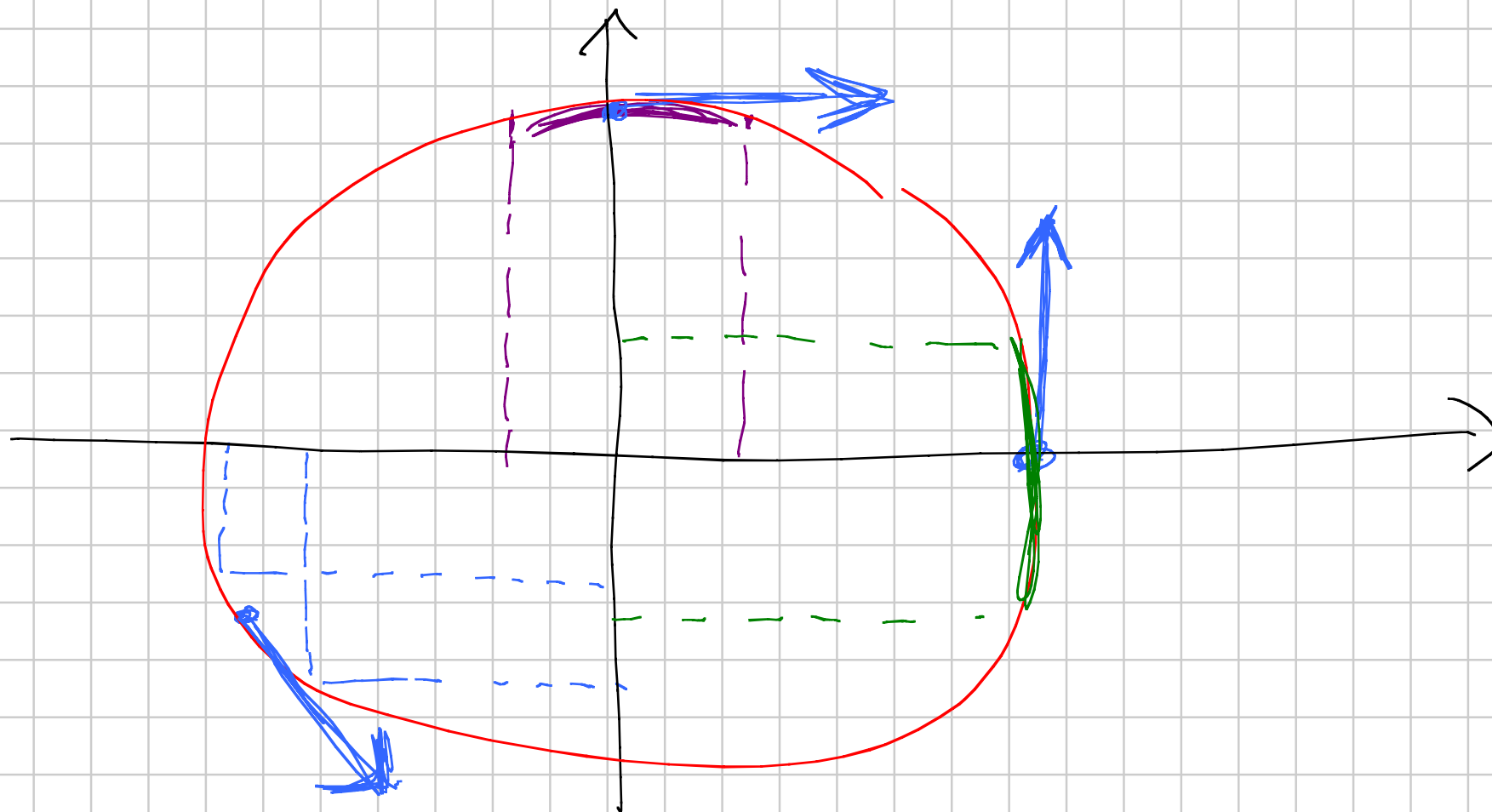
$$\alpha(t) = (X(t), t)$$

Now talk to curve some proper:

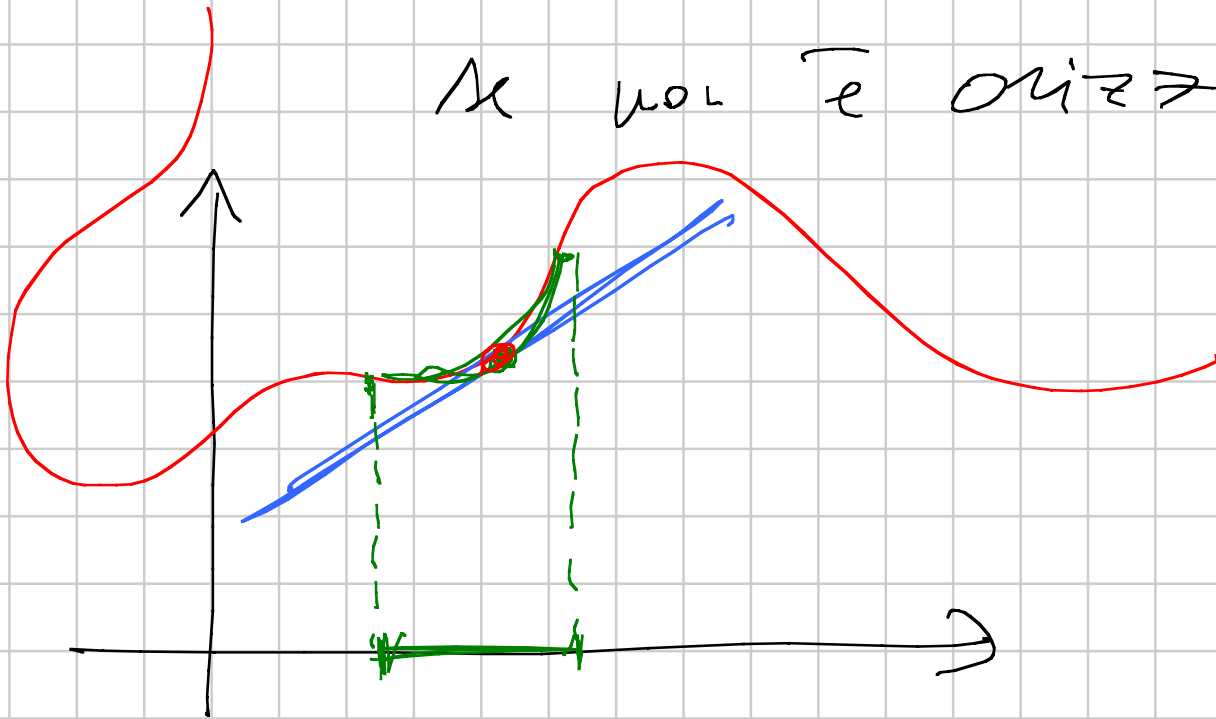


invece: ogni curva è "localmente"
grafico o d: $y = Y(x)$ o d: $x = X(y)$

Si un pezzo
piccolo
vicino a
ogni punto



Quindi: se la tangente nel punto
non è verticale ho loc. $y = X(a)$;
se non è orizzontale ho $a = X(y)$



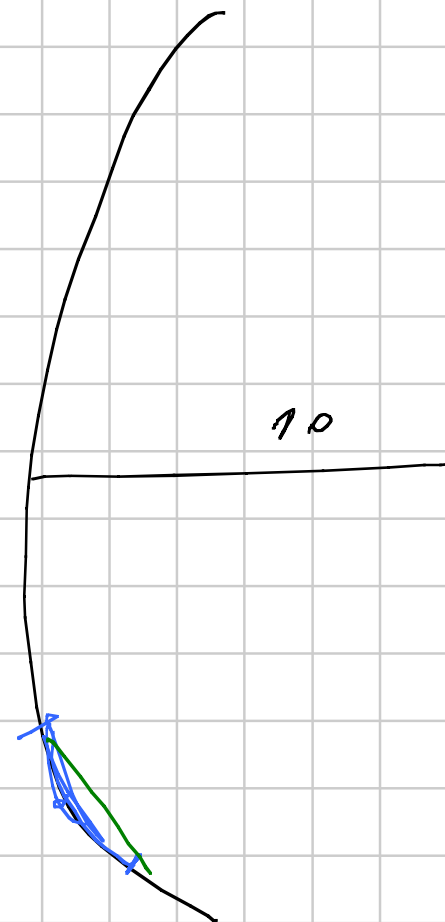
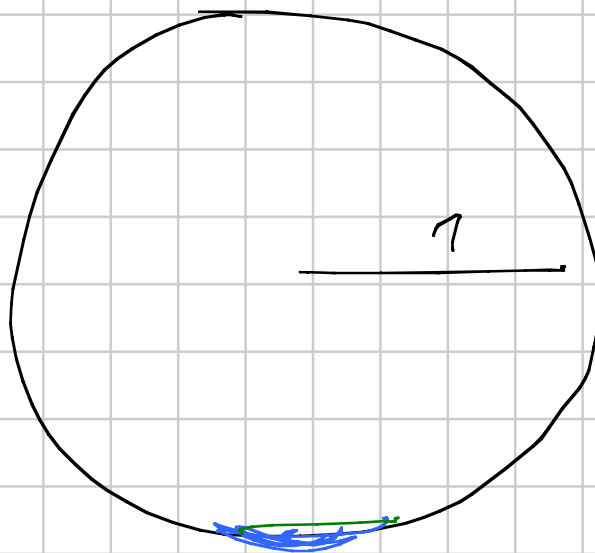
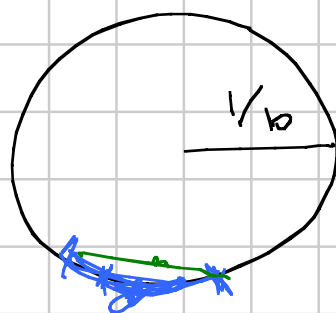
Curvatura di una curva

"misura di quanto non è dritta" (K)

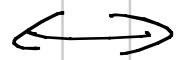


retta

$$\leadsto K=0$$



curvatura
alta



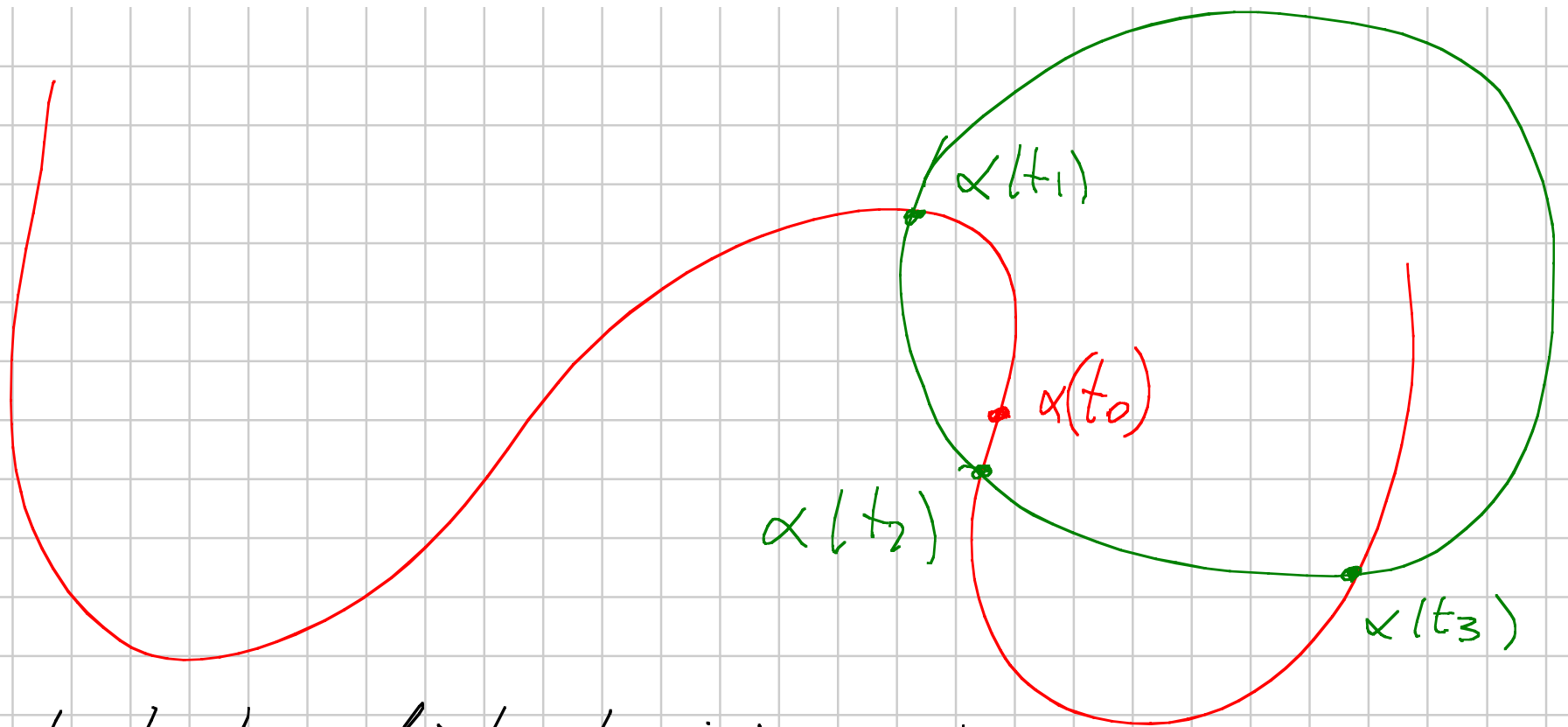
raggio
piccolo

Definiamo: misura di curvatura è

$$\kappa = \frac{1}{\text{raggio}}$$

Per α qualsiasi:





Prendo t_1, t_2, t_3 distinti vicini a t_0
Se non sono allineati prendo l'arco

circonf. che li contiene.

Per $t_1, t_2, t_3 \rightarrow t_0$ tale circonf. tende
a una con triplice contatto con α in $\alpha(t_0)$

$$\hookrightarrow \begin{aligned} & \text{se } d(t) = \text{dist}(\alpha(t), \text{circonf}) \\ & \text{ho } d(t_0) = 0, d'(t_0) = 0, \\ & \quad d''(t_0) = 0 \end{aligned}$$

Def: tale circonf. se esiste $\tilde{t}$ d.t.a

Circonfrenze osculatrice. Chiamo
curvatura di α in $\alpha(t_0)$ il
reciproco del raggio della circonf.
osculatrice.

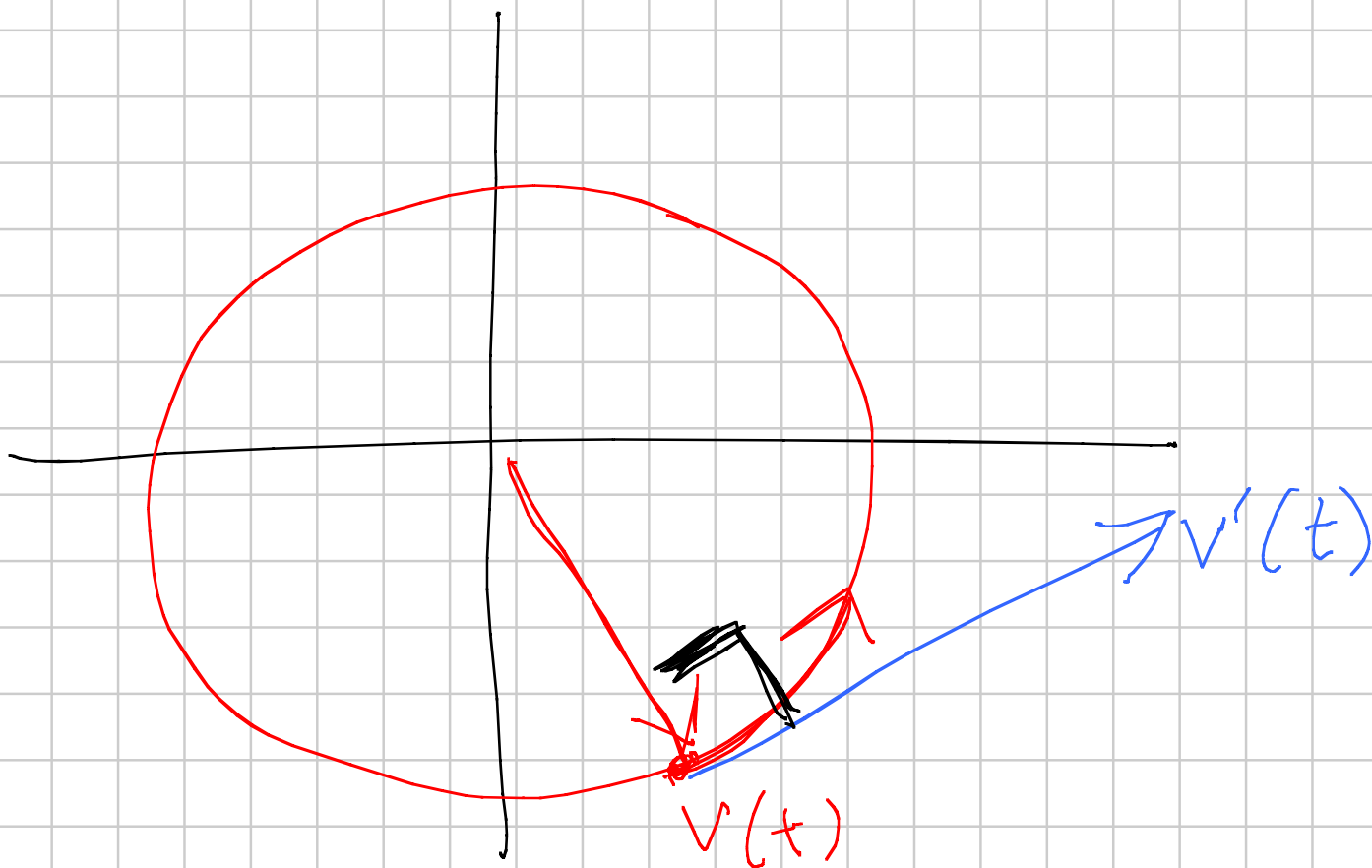
Teo: Se α è in par. d'arco e $\alpha''(t_0) \neq 0$
la circonf. osculatrice è quella che passa per
 $\alpha(t_0)$ e ha centro $\alpha(t_0) + \frac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2}$.

Un particolare ha raggio $\frac{1}{\|\alpha''(t_0)\|}$, dunque

$$K = \|\alpha''(t_0)\|.$$

(Due domini)

LEM: se $v: I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $I \subset \mathbb{R}$,
e $\|v(t)\| \equiv 1 \quad \forall t$ allora $v'(t) \perp v(t) \quad \forall t$.



Qu: $\|v(t)\|^2 = 1$

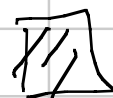
$$\Rightarrow \langle v(t) | v(t) \rangle = 1$$

$\Rightarrow$
derivado
(Leibniz)

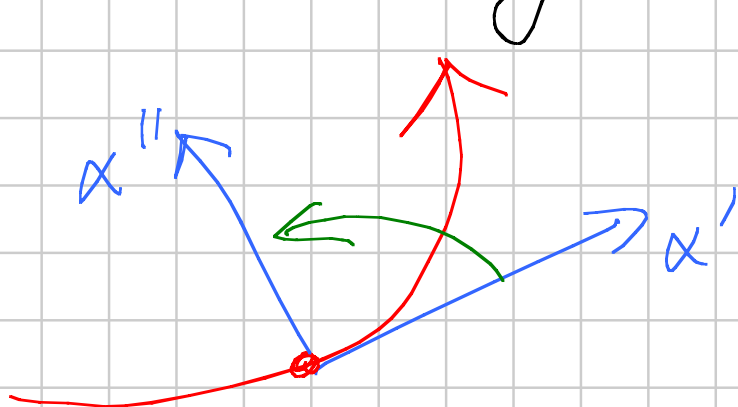
$$\langle v'(t) | v(t) \rangle + \langle v(t) | v'(t) \rangle = 0$$

↑
↑
upuoli

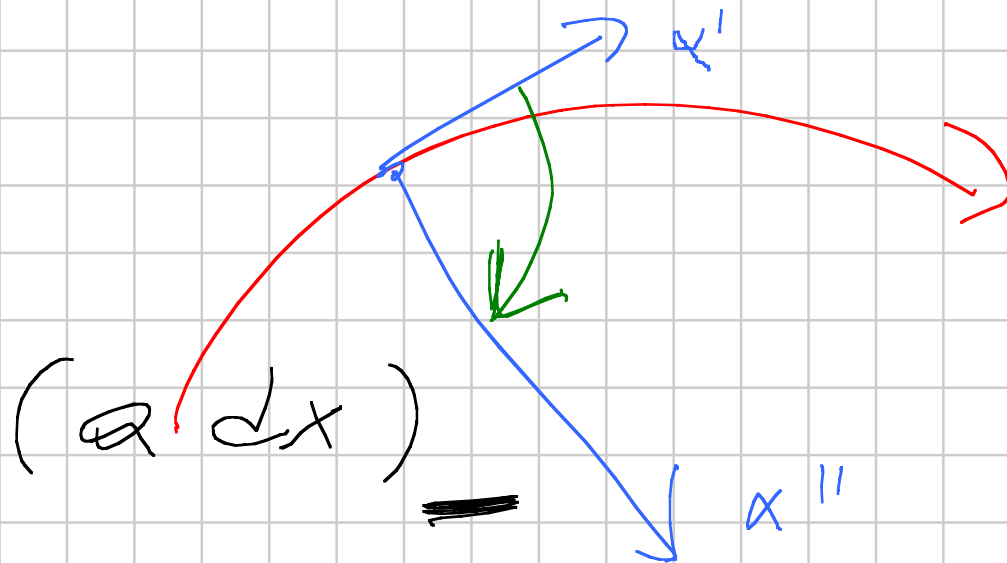
$$\Rightarrow \langle v(t) | v'(t) \rangle = \rho$$



Oss: per α orientato posso
dare un segno alle curvatures:



$(a \sin) \quad \neq$



$(a dx)$

==