Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 19/7/16 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Determinare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ e una base che la diagonalizza.

2. Dati $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}^{\perp}$ e $f : X \to X$ con $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 \\ -3x_2 - 5x_3 \\ -4x_1 + 4x_3 \end{pmatrix}$ determinare $p_f(t)$.

3. Trovare i vettori di $\mathbb{C}^2$ con seconda componente immaginaria, ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-3i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ e unitarî.

4. Provare che gli autovalori di $\begin{pmatrix} i & 2+i \\ -2+i & 5i \end{pmatrix}$ sono immaginari puri, quindi trovarli.

5. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ la conica $4x^2 + 2kxy + y^2 - 8x + 4y = 0$ sia una parabola.

6. Stabilire per quali $k \in \mathbb{R}$ il punto $[k : k^2 + 2 : k - 2]$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
appartiene alla retta passante per $[2 : -3 : 1]$ e $[7 : 5 : 3]$

7. Calcolare $\int_\alpha y \, \mathrm{d}x$ dove $\alpha : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \ln(t+2) \\ t+1 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare la curva $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t - \sin(2\pi t) - 1 \\ t + \cos(2\pi t) - 1 \end{pmatrix}$ e il luogo $\mathcal{L}$ di $\mathbb{R}^2$ di equazione $x^5 - 4x^2y + 2y^3 + 1 = 0$.

(A) (2 punti) Calcolare $\int\limits_{\alpha} \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

(B) (2 punti) Provare che α ha curvatura positiva nel punto $t = \frac{1}{3}$.

(C) (3 punti) Provare che α ha curvatura positiva in ogni punto $t \in [0,1]$.

(D) (2 punti) Provare che gli estremi di α appartengono $\mathcal{L}$.

(E) (3 punti) Provare che $\mathcal{L}$ è una curva agli estremi di α e determinare le rette tangenti a $\mathcal{L}$ in tali punti.

2. Considerare $X = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}\right)$ e $A = \begin{pmatrix} -15 & 26 & 4 \\ -4 & 6 & 1 \\ -24 & 48 & 7 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale su X.

(B) (6 punti) Determinare gli autovalori di A e una base che la diagonalizza.

(C) (2 punti) Senza calcolare $A \cdot M$ determinare due dei suoi autovalori.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 19/7/16 — Quesiti

Risposte

5. ♡

1. $\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -3;\ v_1 = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. $t^2 - 5t - 4$

3. $\pm\frac{1}{3\sqrt{26}}\begin{pmatrix} -7+4i \\ 13i \end{pmatrix}$

4. La matrice è antihermitiana; $6i$ e 0

5. $k = 2$

6. $k = 3$ e $k = -20$

7. $1 + \ln(2) - \ln(3)$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\frac{5}{4}\pi$

(B) $\det(\alpha'(1/3), \alpha''(1/3)) = 4\pi^2\left(2\pi + 2 - \sqrt{3}\right) > 0$

(C) $\det(\alpha'(t), \alpha''(t)) = 4\pi^2\left(2\pi - 2\cos(2\pi t) - \sin(2\pi t)\right) > 4\pi^2(2\pi - 3) > 0$

(D) Gli estremi sono $(-1, 0)$ e $(1, 1)$, che soddisfano l'equazione di $\mathcal{L}$

(E) Agli estremi di $\mathcal{L}$ le derivate parziali di $x^5 - 4x^2y + 2y^3 + 1$ non si annullano. Le tangenti sono $5(x+1) - 4y = 0$ e $-3(x-1) + 2(y-1) = 0$

2.

(A) $M = \frac{1}{26}\begin{pmatrix} 10 & -12 & 4 \\ -12 & 17 & 3 \\ 4 & 3 & 25 \end{pmatrix}$

(B) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = -1;\ v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

(C) Essendo una proiezione, M ha nucleo di dimensione 1, dunque $A \cdot M$ ha l'autovalore 0; inoltre l'autovettore v_1 di A rispetto all'autovalore $\lambda_1 = 1$ appartiene a X, pertanto $M \cdot v_1 = v_1$, e allora $A \cdot M \cdot v_1 = v_1$, dunque $A \cdot M$ ha anche l'autovalore 1