UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 7/6/16 — Quesiti

Nome ______ **Cognome** ______ **Matricola** ______

1. Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

2. Se $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ rappresenta una rotazione intorno a una retta di angolo $\frac{\pi}{3}$, quanto vale $\mathrm{tr}(M)$?

3. Trovare i punti del luogo $\{[1+t : t-2 : 1-t] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) :\ t \in \mathbb{R}\}$ che sono punti all'infinito del luogo di $\mathbb{R}^3$ definito dall'equazione $2x^2 - z^2 - 4xy + 6yz + 19y + 2z = 13$.

4. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $y^2 + 6xz + 18yz + 2y + 2 = 0$.

5. Calcolare $\int_\alpha (2z-1)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ t^2+2t \\ t+1 \end{pmatrix}$.

6. Calcolare $\int_\alpha (2x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x)$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 5t-t^3 \\ 1-2t-t^2 \end{pmatrix}$.

7. Calcolare $\int_\alpha \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 4t^2-3t \\ 1-6t+5t^2 \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Al variare di $s,t \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $M = \begin{pmatrix} s & t^2-1 & 1 \\ 1-t & -7 & 2t^2-3 \\ 1 & t+7 & -3 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Stabilire per quali s,t esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ fatta da autovettori di M.

(B) (3 punti) Stabilire per quali s,t vale quanto richiesto nel punto (A) e $\det(M) = 0$.

(C) (3 punti) Per s,t come nel punto (B) determinare i segni degli autovalori di M.

(D) (3 punti) Per s,t come nel punto (B) trovare un generatore v di $\mathrm{Im}(M)^{\perp}$ e giustificare il fatto che $M \cdot v = 0$.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} k+2 & 1 & -1 \\ 2k^2-3k-5 & 2-k & k^2+k-3 \\ 2k^2-k-8 & -2 & k^2+1 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A) = -k^4 + 4k^3 + 6k^2 - 4k - 5$.

(B) (3 punti) Sapendo che $p_A(2) = k^4 - 4k^3 + 12k - 9$ calcolare $p_A(t)$.

(C) (2 punti) Sapendo che A ha sempre l'autovalore k^2-1 trovare gli altri.

(D) (5 punti) Al variare di k trovare la molteplicità algebrica e geometrica degli autovalori di A, stabilendo se essa sia diagonalizzabile o meno.

Risposte

5. ♡

1. $\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = 3;\ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix},\ v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. 2

3. $[4 : 1 : -2]$ e $[10 : -17 : 8]$

4. Iperboloide ellittico (a due falde)

5. $\frac{7}{4}\sqrt{21} - \frac{5}{12}\sqrt{5}$

6. $-\frac{143}{10}$

7. $\frac{3}{2}\pi$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $t = -2$, ogni s

(B) $t = -2$, $s = 16$

(C) Uno positivo, uno negativo e uno nullo

(D) $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$; se w e z sono autovettori relativi agli autovalori non nulli, allora $\mathrm{Im}(M) = \mathrm{Span}(w, z)$, dunque v è un autovettore relativo all'autovalore nullo

2.

(A) Sostituendo la seconda riga con sé stessa meno la terza e poi la terza colonna con sé stessa più la seconda si conclude facilmente

(B) $t^3 - (k^2 + 5)t^2 + (5k^2 + 4k - 1)t - (-k^4 + 4k^3 + 6k^2 - 4k - 5)$

(C) $k + 1$ e $5 - k$

(D) Per k diverso da -3, -1 e 2 tre autovalori distinti: diagonalizzabile;
per $k = -3$ autovalore 8 doppio con molteplicità geometrica 1: non diagonalizzabile;
per $k = -1$ autovalore 0 doppio con molteplicità geometrica 1: non diagonalizzabile;
per $k = 2$ autovalore 3 triplo con molteplicità geometrica 2: non diagonalizzabile