

ETA 24/9/15

Categoria : $\mathcal{C}$ $\text{Obj}(\mathcal{C}) \leftarrow$ l'ou è un insieme
" $X \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ "
significa " X è un oggetto di $\mathcal{C}$ "

X è insieme

$\forall X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})$ $\text{Hom}(X, Y)$ (OK anche $\emptyset$;

- $\exists \circ : \text{Hom}(X, Y) \times \text{Hom}(Y, Z) \rightarrow \text{Hom}(X, Z)$ possono non essere
unippe)
 $(f, g) \mapsto g \circ f$
 t.c. $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ quando ho senso
- $\forall X \exists 1_X$ t.c. $f \circ 1_X = f$ $1_Y \circ f = f$
 quando ha senso -

Esempio:

SET

$\text{Obj}(\text{SET}) =$ gli insiemi

$\text{Hom}_{\text{SET}}(X, Y) =$ mappe $X \rightarrow Y$

TOP

Obj = spazi topologici

$$\text{Hom}(X, Y) = \{ f : X \rightarrow Y : f \text{ continua} \}$$

GROUP

Obj = i gruppi

Hom = gli omomorfismi

GROUP $\supset$ AB

TOP $\supset$ INT, SURJ, BIT

mappe iniettive / sur / bive / bi / bive

TOP*

Obj = sp. top. puntati

(X, x_0)

$$\text{Hom}((X, x_0), (Y, y_0)) = \{ f : X \rightarrow Y \text{ continua} : f(x_0) = y_0 \}$$

$\mathcal{E}$: X insieme parz. ord. $\mathcal{A}_0$

$$\text{Obj} = X$$

$$\text{Hom}(x, y) = \begin{cases} \{(x, y)\} & \text{se } x \leq y \\ \emptyset & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$1_x \in \text{Hom}(x, x) \quad 1_x = (x, x) \quad (\text{c'è per riflessivo})$$

$$(f, g) \mapsto g \circ f \quad \text{ha senso se } \text{dom } f = \text{cod } g$$

$$\begin{array}{lll} f \in \text{Hom}(x, y) & x \leq y & f = (x, y) \\ g \in \text{Hom}(y, z) & y \leq z & g = (y, z) \end{array}$$

$$\Rightarrow x \leq z \Rightarrow \text{Hom}(a, z) = \{(a, x)\}$$

$$(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$$

Es: $\text{Obj} = \text{gruppi}$ $\text{Hom}(G, H) =$ classi di coniugio
di omomorfismi $G \rightarrow H$

$$= \{ f : G \rightarrow H \text{ omomorf} \}$$

$$1_G = [\text{id}_G]$$

$$[\varphi] \circ [\psi] := [\varphi \circ \psi]$$

$$\begin{aligned} & \text{---} f \sim f' \\ & \text{se } \exists h, t, r. \\ & f'(g) = h \circ f(g) \circ h^{-1} \quad \forall g \end{aligned}$$

Verifica: $\varphi' \sim \varphi, \psi' \sim \psi \Rightarrow \varphi' \circ \psi' \sim \varphi \circ \psi$ -

Def: in $\mathcal{C}$ se $g \circ f = \text{id}_X$ diciamo che
 g è inverso sx di f
 f è inverso dx di g

Se $g \circ f = \text{id}_X$, $f \circ g = \text{id}_Y$ dico che g è inverso di f .
(diciamo f isomorfismo; $g := f^{-1}$)

Lea: 1. Se f ha inversi sx e dx allora sono uguali
 $\Rightarrow f$ invertibile

2. id_X è unica

3. f^{-1} è unico -

Dim: 1. $h \circ f = \text{id}_X$ $f \circ g = \text{id}_Y$

$$\underline{h = h \circ \text{id}_Y = h \circ f \circ g = \text{id}_X \circ g = g} \quad [\dots] \square$$

Dato $\mathcal{C}$ costruiamo $\text{Hom}(\mathcal{C})$:

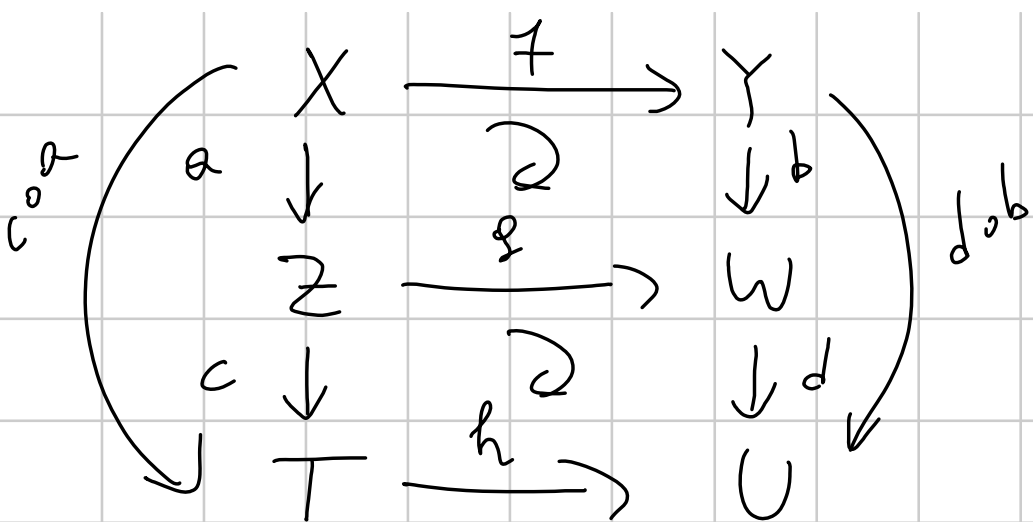
$$\text{Obj}(\text{Hom}(\mathcal{C})) = \bigcup_{X, Y \in \text{Obj}(\mathcal{C})} \text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$$

Data $X \xrightarrow{f} Y$, $Z \xrightarrow{g} W$

$$\text{Hom}_{\text{Hom}(\mathcal{C})}(f, g) = \{ (a, b) \in \text{Hom}(X, Z) \times \text{Hom}(Y, W) \text{ s.t.}$$

$$\left. \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ a \downarrow & \text{ } \downarrow b & \\ Z & \xrightarrow{g} & W \end{array} \right\}$$

$$\text{Hom}(f, g) \times \text{Hom}(g, h) \rightarrow \text{Hom}(f, h)$$



$$(c, d) \circ (a, b) := (ca, db)$$

Diagram illustrating the composition of morphisms $(c, d) \circ (a, b) := (ca, db)$. The diagram shows the composition of (c, d) and (a, b) resulting in (ca, db) . The arrows indicate the mapping from $\text{Hom}(C)$ to $\text{Hom}(A, B)$ and from $\text{Hom}(A, B)$ to $\text{Hom}(C, D)$.

Es: categorie derivate dalle coppie -
 $\mathcal{C}$ t.c. $\text{Hom}(X, Y)$ sono mappe $X \rightarrow Y$ -

$$\text{Obj}(\mathcal{P}(\mathcal{C})) = \{ i \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) : A, X \in \text{Obj}(\mathcal{C}), i \text{ iniettivo} \}$$

cioè un oggetto di $\mathcal{P}(C)$ è (X, A) con $A \subset X$

$$\text{Hom}(A \xrightarrow{i} X, B \xrightarrow{j} Y) = \{ (f, n) \text{ t.r.} \}$$

$$\left. \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ n \downarrow & \curvearrowright & \downarrow \neq \\ B & \xrightarrow{j} & Y \end{array} \right\}$$

cioè un morfismo $(X, A) \rightarrow (Y, B)$

è un morfismo $f: X \rightarrow Y$ t.r. $f(A) \subset B$.

Def: se $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ sono categorie chiamesi **funttore covariante** F da $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ una legge che associa: a ogni X oggetto di $\mathcal{C}$ un oggetto $F(X)$ di $\mathcal{D}$ o ogni $\varphi \in \text{Hom}(X, Y)$ un $F(\varphi) \in \text{Hom}(F(X), F(Y))$ e.c.

$$F(1_X) = 1_{F(X)} \quad F(\psi \circ \varphi) = F(\psi) \circ F(\varphi) -$$

Def: **contravariante** se

$$\varphi \in \text{Hom}(X, Y) \leadsto F(\varphi) \in \text{Hom}(F(Y), F(X))$$

$$F(\psi \circ \varphi) = F(\varphi) \circ F(\psi) -$$

Obs: se F è funtore cov/contrav
 $X \cong Y \Rightarrow F(X) \cong F(Y)$ -

Def: data $\mathcal{C}$ posto $OP(\mathcal{C})$ categorie opposte

$$Obj(OP(\mathcal{C})) = Obj(\mathcal{C}) \quad Hom_{OP(\mathcal{C})}(X, Y) = Hom_{\mathcal{C}}(Y, X)$$

$$\psi \circ_{OP(\mathcal{C})} \varphi = \varphi \circ_{\mathcal{C}} \psi -$$

Obs: " $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ " funtore contravariante

$\updownarrow$
" $\hat{F} : \mathcal{C} \rightarrow OP(2)$ " funtore covariante

A, B gruppi abeliani, $\text{Hom}(A, B)$: gruppo l'operazione
 di prodotto puntuale.
 Verifico che $\varphi, \psi \in \text{Hom}(A, B) \Rightarrow \varphi \cdot \psi \in \text{Hom}(A, B)$ -

$$(\varphi \cdot \psi)(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1 \cdot a_2) \cdot \psi(a_1 \cdot a_2) = \varphi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \cdot \psi(a_1) \cdot \psi(a_2)$$

$$(\varphi \cdot \psi)(a_1) \cdot (\varphi \cdot \psi)(a_2) =$$

$$\varphi(a_1) \cdot \psi(a_1) \cdot \varphi(a_2) \cdot \psi(a_2)$$

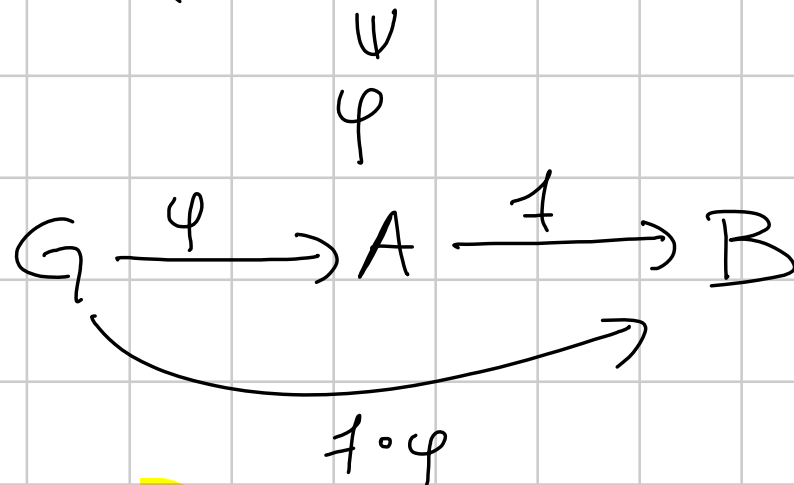
↑
serve B abeliano

Es: funtore covariante: fisso G gruppo abeliano.
 Ab = categoria dei gruppi abeliani

$$R^G: Ab \rightarrow Ab$$

$$R^G(A) = \text{Hom}(G, A)$$

Data $f \in \text{Hom}(A, B)$ devo definire
 $R^G(f) \in \text{Hom}(\text{Hom}(G, A), \text{Hom}(G, B))$



$$R^G(f)(\varphi) = f \circ \varphi$$

Devo vedere:

- $R^G(f)$ è un omomorfismo rispetto all'operazione di prodotto puntuale, cioè

$$R^G(f)(\varphi_1 \cdot \varphi_2) = R^G(f)(\varphi_1) \cdot R^G(f)(\varphi_2)$$

(esercizio: è un'identità tra omomorfismi $G \rightarrow B$ applicarli a un generico $x \in G$ e fare i conti) -

- $R^G(h \circ f) = R^G(h) \circ R^G(f)$

$$\begin{array}{ccc}
 R^G(h \circ f)(\varphi) & = & (R^G(h) \circ R^G(f))(\varphi) \\
 \parallel & & \parallel \\
 (h \circ f) \circ \varphi & & R^G(h)(R^G(f)(\varphi)) \\
 & & h \circ (f \circ \varphi)
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 f: A \rightarrow B \\
 h: B \rightarrow C
 \end{array}$$

Es: Functore contravariante $L^G: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Ab}$

$$L^G(A) = \text{Hom}(A, G) \quad (G \in \mathbf{Ab} \text{ fissato})$$

$$f: A \rightarrow B \quad \forall \varphi \in \text{Hom}(B, G)$$

ho $\varphi \circ f \in \text{Hom}(A, G)$

$$f \in \text{Hom}(A, B) \leadsto L^G(f) : L^G(B) \rightarrow L^G(A)$$

$$\varphi \mapsto \varphi \circ f$$

(verificare come sopra) —

$X \subset \mathbb{R}^n$ convesso se $(1-t)x_0 + tx_1 \in X \quad \forall x_0, x_1 \in X$
 $t \in [0, 1]$

$$\text{Conv}(S) = \bigcap_{\substack{X \subset \mathbb{R}^N \\ X \text{ convesso} \\ X \supset S}} X$$

inviluppo convesso di $S \subset \mathbb{R}^N$
 (Per ogni $T, T_0 \subset \mathbb{R}^N$)

Lem : $\text{Conv}(v_0, \dots, v_m) = \left\{ \underbrace{\sum_{i=0}^m t_i v_i}_{\text{combinazione convessa}} : t_i \geq 0, \sum_{i=0}^m t_i = 1 \right\}$

Dim : $\supset$ per induzione su $\#\{i : t_i \neq 0\} = p$

Base $p=1$ $\sum t_i v_i = v_{i_0} \in \text{Conv}(v_0, \dots, v_m)$

Sia $p > 1$. A meno di rinominare $0 < t_0 < 1$

$$\sum_{i=0}^m t_i v_i = t_0 v_0 + (1-t_0) \cdot \sum_{i=1}^m \underbrace{\frac{t_i}{1-t_0}}_{\lambda_i} v_i$$

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i = \frac{1}{1-t_0} \sum_{i=1}^m t_i = \frac{1}{1-t_0} (1-t_0) = 1$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \text{ è comb. convessa}$$

e $\# \{i : \lambda_i \neq 0\} = p-1$
per induzione $\sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \in \text{Conv}(v_0, \dots, v_m)$

Queltra $v_0 \in \text{Conv}(v_0, \dots, v_m)$

$\Rightarrow t_0 v_0 + (1-t_0) \sum_{i=1}^m \lambda_i v_i \in \text{Conv}(v_0, \dots, v_m)$ - OK

$\subset$ Basta vedere che $\text{RHS} = \left\{ \sum_{i=0}^m t_i v_i : t_i \geq 0, \sum t_i = 1 \right\}$

• contiene $v_0, \dots, v_m$ ✓

• $\tilde{t}$ convesso ;

$$\begin{aligned} 1. \quad & \sum_{i=0}^n t_i v_i + (1-\alpha) \sum_{i=0}^n u_i v_i \\ &= \sum_{i=0}^n \underbrace{(\alpha t_i + (1-\alpha) u_i)}_{\pi_i} \cdot v_i \end{aligned}$$

$$\pi_i \geq 0 \quad \sum_i \pi_i = 1$$

$$\alpha \in [0,1)$$

$$t_i \geq 0 \quad s_i \geq 0$$

$$\sum_i t_i = \sum s_i = 1$$



Prop.: Dato $v_0, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ sono fatti equiv.

- (1) Non esiste un stsp. affine W di $\mathbb{R}^n$ che li contiene con $\dim W < m$
- (2) $v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0$ sono lin. indep.
- (3) $\sum_i t_i v_i = 0 \quad \sum_i t_i = 0 \Rightarrow t_i \equiv 0$
- (4) Ogni elemento di $\text{Conv}(v_0, \dots, v_m)$ si esprime in modo unico come comb. convenga d. $v_0, \dots, v_m$

Dim.: (1) $\Leftrightarrow$ (2) la giacitura del più piccolo stsp. affine che li contiene è $\text{Span}(v_1 - v_0, \dots, v_m - v_0)$.

(2) $\Leftrightarrow$ (3)

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0$$

$$\sum_{i=0}^n t_i v_i = \sum_{i=1}^n t_i (v_i - v_0) \quad \text{"e viceversa"}$$

(3) $\Rightarrow$ (4)

Ouvio : $\sum_{i=0}^n t_i v_i = \sum_{i=0}^n s_i v_i$ com $\sum_{i=0}^n t_i = \sum_{i=0}^n s_i = 1$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^n (t_i - s_i) v_i = 0 \quad \sum_{i=0}^n (t_i - s_i) = 0$$

(4) $\Rightarrow$ (3) Sia $\sum_{i=0}^n t_i v_i = 0$ com $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ e $t_i \neq 0$

Wlog

$$t_0 > 0$$

$$t_1, \dots, t_p \geq 0$$

$$t_{p+1}, \dots, t_{m-1} \leq 0$$

$$t_m < 0$$

$$\sum_{i=0}^m t_i v_i = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^p t_i v_i = \sum_{i=p+1}^m (-t_i) v_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=0}^p \frac{t_i}{\underbrace{\left(\sum_{j=0}^p t_j \right)}_{\lambda_i}} v_i = \sum_{i=p+1}^m \frac{-t_i}{\underbrace{\left(\sum_{j=0}^p t_j \right)}_{\mu_i}} v_i$$

$$\lambda_i \geq 0 \quad \sum_{i=0}^p \lambda_i = 1$$

$$\mu_i \geq 0 \quad \sum_{i=p+1}^m \mu_i = \frac{-\sum_{i=p+1}^m t_i}{-\sum_{j=p+1}^m t_j} = 1$$

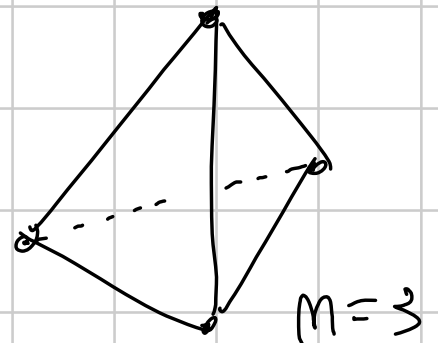
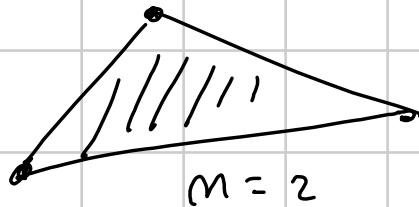
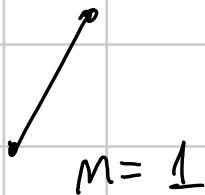
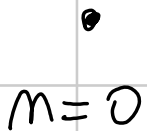
$$\Rightarrow \sum_{i=0}^p \lambda_i v_i = \sum_{i=p+1}^n \mu_i v_i$$

sono espressioni diverse
dello stesso pto di $\text{Conv}(v_0, \dots, v_n)$



Nelle ipotesi della Prop. chiamo $\text{Conv}(v_0, \dots, v_n)$

n -simplex di vertici $v_0, \dots, v_n$ -

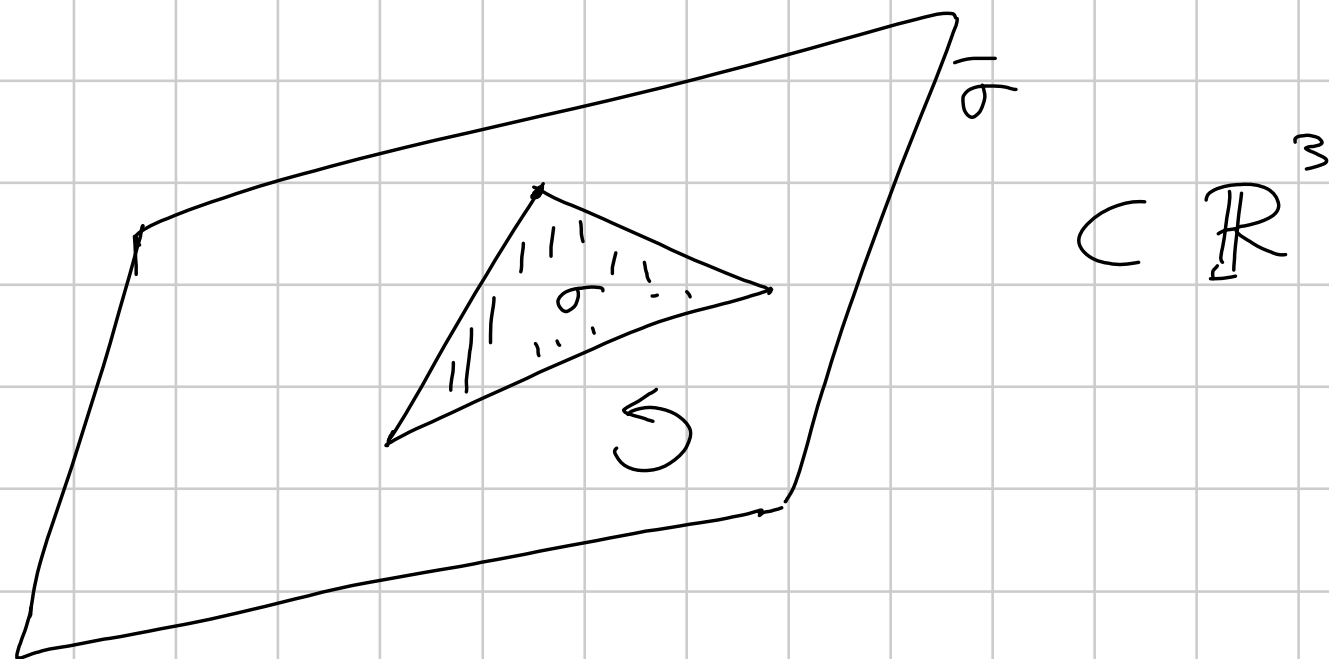


Def: chiamo orientazione di uno sp. vett. V in el. di
 $\{ \text{bas. di } V \} / \sim$ $B' \sim B$ se $B' = B \cdot A$ con
 $\det(A) > 0$

(ce ne sono due) — Orientazione per spazio affine:
 orientazione della sua giacitura —

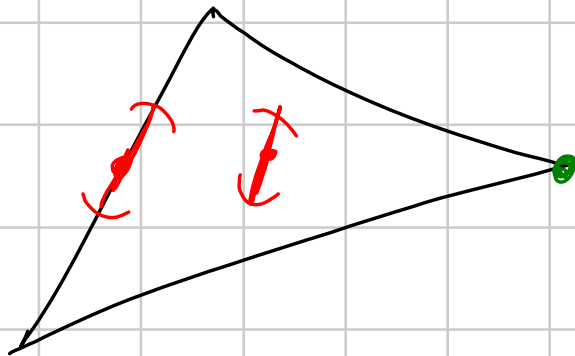
Dato $\sigma^{(n)}$ semplice chiamo $\overline{\sigma}$ il minimo stsp.
 affine che lo contiene (tutti i semplici sono chiusi) —

Chiamo $\triangleright$ -orientazione di σ una orientazione di $\bar{\sigma}$.



Chiamo p -orientazione di σ un ordinamento dei suoi vertici a meno di permutazioni pari $\mathcal{S}_{m+1}^+$.

Esercizio : Provare che i vertici di σ sono unici
(hint: provare che sono gli unici punti di σ
che non sono interni ad alcun segmento CO)



p -orientazione $\rightsquigarrow$ b -orientazione

Se $(V_0, \dots, V_m)$ è p -positivo di mano $\underbrace{V_1 - V_0, \dots, V_m - V_0}_{\text{base di } \bar{\sigma}}$ b -positivo e ric.

È ben def: devo vedere che applicando una permutaz.
ottraggo una coppia di cambio di base
con segno = ± 1 permutaz.

$$M_2 : \text{sgn} : \mathcal{O} \rightarrow \{\pm 1\} \quad \frac{\det}{|\det|} : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \{\pm 1\}$$

non omografici $\Rightarrow$ basta vederlo sulle tracce -

Au3i: $(01)(12)(01) = (02)$

$\Rightarrow$ basta vederlo per le $(i, i+1)$ -

$$i > 0 \quad V_0, \dots, V_i, V_{i+1}, \dots, V_n$$
$$V_1 - V_0 \dots$$

$$V_0 \dots V_{i+1} \quad V_i \dots V_n$$
$$V_1 - V_0 \dots$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$$

$\det = -1$

$$i=0$$

$$V_1 - V_0, \dots, V_n - V_0$$

$$V_0 - V_1 = -(V_1 - V_0)$$

$$V_2 - V_1 = -(V_1 - V_0) + (V_2 - V_0)$$

$$\vdots$$

$$V_n - V_1 = -(V_0 - V_1) + (V_n - V_0)$$

verdwie

move



$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & \dots & - \\ 0 & 1 & 0 & & \\ 0 & & 1 & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det = -1$$

