

ETA 18/11/15

$$M^{(3)}$$

$$N \cong M \setminus pt$$

$$H_1(N) = H_1(M)$$

via

$$H_2(N) = H_2(M)$$

:

$$N = M \setminus B^3$$

$$M = N \cup_{S^2} D^3$$

$$d_2 \bar{e} \cong$$

$$H_3(S^2) \xrightarrow{\quad} H_3(N) \oplus H_3(D^3) \rightarrow H_2(M) \xrightarrow{d_2} H_2(S^2) = \mathbb{Z}$$

$\begin{matrix} \text{blue } 0 & \text{blue } 0 & \text{blue } 0 & \text{blue } \mathbb{Z} \end{matrix}$

$$H_1(S^2) \leftarrow H_2(M) \xleftarrow{i} H_2(N) \oplus \underbrace{H_2(D^3)}_0$$

$\begin{matrix} \text{blue } 0 & \text{blue } i & \text{blue } 0 \end{matrix}$

$$d_2 \cong \Rightarrow i = 0 \Rightarrow j \cong \bar{e} \cong -$$

$$\underline{\hspace{10em}} \quad 0 \quad \underline{\hspace{10em}}$$

Assiomi dell'omologia:

$\mathcal{P}_2$:

Obj: coppie (X, A) con $X = |\mathcal{X}|$, $A \subset |\mathcal{X}|$

Hom: $(X, A) \xrightarrow{\gamma} (Y, B)$ continua

$A_b^{\mathbb{N}}$

Obj: $(G_n)_{n=0}^{+\infty}$

G_n gruppo ab

Hom: $(\varphi_n)_{n=0}^{+\infty}$

φ_n omomorf

Visto: H è un funtore covariante $\mathcal{P}_2 \longrightarrow Ab^N$ e...

I. Omotopia: $f_0, f_1: (X, A) \rightarrow (Y, B)$ $f_0 \simeq_A f_1$
 $\Rightarrow H(f_0) = H(f_1)$

II. Escissione: $X = Y \cup Z \Rightarrow H(X, Z) = H(Y, Y \cap Z)$

III. LES

$$\dots \rightarrow H_m(A) \rightarrow H_m(X) \rightarrow H_m(X, A) \rightarrow H_{m-1}(A) \rightarrow \dots$$

funtoriale

IV Dimensione: $H_m(pt) = \begin{cases} \mathbb{Z} & m=0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$

(0-omologia (non serve)) -

Oss: ci sono bastati per calcolare

$$H_m(S^m) = H_m(D^m, S^{m-1})$$

(in realtà abbiamo usato $\tilde{H}_m$, però si può evitare:

$$\text{LES}(\tilde{H}) \dots \xrightarrow{j} H_1(D^m, S^{m-1}) \xrightarrow{d} \tilde{H}_0(S^{m-1}) \rightarrow \tilde{H}_0(D^m)$$

$\Rightarrow j$ suriettivo

$\begin{array}{c} \parallel \\ 0 \end{array}$ $\begin{array}{c} \parallel \\ 0 \end{array}$

$$\text{LES}(H) \dots \xrightarrow{j} H_1(D^m, S^{m-1}) \xrightarrow{d} H_0(S^{m-1}) \xrightarrow{i} H_0(D^m)$$

$\parallel$ $\parallel$

$$\xrightarrow{d} \mathbb{Z} \xrightarrow{i=id} \mathbb{Z}$$

$i=id \Rightarrow d=0 \Rightarrow$ è suriettivo —)

Oss: vedremo che tali proprietà caratterizzano H
 $\Rightarrow$ Mayer-Vieton discende dagli assiomi
 (mentre la dimo era geometrica) —

Funzione covariante $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ e il $\downarrow A_0$ di
 $\forall A \in \mathcal{C}, F(A) \in \mathcal{D} \quad \forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$
 $F(f) \in \text{Hom}_{\mathcal{D}}(F(A), F(B))$ l.c. ... commuta

Siano $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funtori covarianti.

Chiamo trasformazione naturale da F a G il dato di:

- $\forall A \in \text{Obj}(\mathcal{C})$, $\varphi_A : F(A) \longrightarrow G(A)$ t.c.

$$\forall f \in \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B)$$

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{F(f)} & F(B) \\ \varphi_A \downarrow & & \downarrow \varphi_B \\ G(A) & \xrightarrow{G(f)} & G(B) \end{array}$$

Se gli oggetti di $\mathcal{D}$ hanno una struttura algebrica
e ogni φ_A è un isomorfismo per lei, diciamo
 φ isomorfismo naturale -

Thm: dati $H, H' : \mathcal{P}_2 \rightarrow \mathbf{Ab}^{\mathbb{Z}}$ funtori cov. con $\mathbb{I}/\mathbb{II}/\mathbb{III}/\mathbb{IV}$
e data una transf. naturale $\varphi : H \rightarrow H'$
che sia un isomorfismo sul punto e sempre omomorf.
si ha che φ è un isomorfismo -

Lemma dei 5 : dato un diagramma commutativo

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\ \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\ A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E' \end{array}$$

con righe esatte e $\alpha, \beta, \delta, \varepsilon$ isomorfismi. si ha
che anche γ è isomorfismo —

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{\ell} & E \\
 \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{\ell'} & E'
 \end{array}$$

γ injective : $c \in C, \gamma(c) = 0 ; k'(\gamma(c)) = 0 \Rightarrow \delta(k(c)) = 0 ;$

δ injective $\Rightarrow k(c) = 0 ; \text{Ker } k \subset \text{Im } j \Rightarrow c = j(b) ;$

$\gamma(j(b)) = 0 \Rightarrow j'(\beta(b)) = 0 ; \text{Ker } j' \subset \text{Im } i'$

$\Rightarrow \beta(b) = i'(a') ; \alpha$ surjective $\Rightarrow a' = \alpha(a) ;$

$\beta(i(a)) = i'(\alpha(a)) = i'(a') = \beta(b) ; \beta$ injective $\Rightarrow b = i(a) ;$

$$C = j(b) = j(i(a)) = 0 \quad (\text{Ker } i \supset \text{Im } i)$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 A & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{j} & C & \xrightarrow{k} & D & \xrightarrow{l} & E \\
 \alpha \downarrow & & \beta \downarrow & & \gamma \downarrow & & \delta \downarrow & & \varepsilon \downarrow \\
 A' & \xrightarrow{i'} & B' & \xrightarrow{j'} & C' & \xrightarrow{k'} & D' & \xrightarrow{l'} & E'
 \end{array}$$

γ surjective: Sia $c' \in C'$; $k'(c') = \delta(d)$ d surjective;

$$\varepsilon(l(d)) = l'(\delta(d)) = l'(k'(c')) = 0 \quad (\text{Ker } l' \supset \text{Im } k'); \quad \varepsilon \text{ injective}$$

$$\Rightarrow l(d) = 0 \Rightarrow d = k(c) \quad (\text{Ker } l \subset \text{Im } k);$$

$$k'(c' - \gamma(c)) = k'(c') - \delta(k(c)) = k'(c') - \delta(d) = 0 \Rightarrow \text{Ker } k' \subset \text{Im } j'$$

$$c' - \gamma(c) = j'(b') ; \quad \beta \text{ sup} \Rightarrow b' = \beta(b)$$

$$\gamma(j(b)) = j'(\beta(b)) = j'(b') = c' - \gamma(c) \Rightarrow c' = \gamma(c + j(b)) \quad \square$$

Dimo (thm) : I. Caso $A = \emptyset$.

Per induzione su $\# K$, $X = |K|$.

Passo base : $\# K = 1$; $X = p^t$; ho isomorfismo
notando per ipotesi.

Passo induttivo : $\# K \geq 2$, $\sigma \in K$ semplice di dim.
massima (ok anche $\sigma = p^t$) ; sia $\mathcal{L} = K \setminus \sigma$ è sottocmpl.

$$\begin{aligned}
 H_*(K, \mathbb{Z}) &= H_*(\sigma, \partial\sigma) && \text{espressione} && \left(\text{Dss: } |\mathbb{Z}| \right) \\
 &= H_*(D^m, S^{m-1}) && |K| = |\mathbb{Z}| \cup \sigma && \left(= |K| \setminus \text{into } \sigma \right)
 \end{aligned}$$

Stesso per $H'_*(K, \mathbb{Z}) = H_*(D^m, S^{m-1})$; usando la
functorialità si vede che le assegnate trasformazioni naturali φ

$$H(K, \mathbb{Z}) \longrightarrow H'(K, \mathbb{Z}) \quad \bar{\varphi} \text{ un isomorfismo.}$$

Ora:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \dots \rightarrow H_{m+1}(X, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{d} & H_m(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i} & H_m(X) & \xrightarrow{\partial} & H_m(K, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{i} & H_{m-1}(\mathbb{Z}) \rightarrow \dots \\
 \downarrow \text{red} & & \downarrow \text{green} & & \downarrow & & \downarrow \text{red} & & \downarrow \text{green} \\
 \dots \rightarrow H'_{m+1}(\mathbb{Z}, d) & \rightarrow & H'_m(\mathbb{Z}) & \xrightarrow{i} & H'_m(X) & \xrightarrow{\partial} & H'_m(K, \mathbb{Z}) & \rightarrow & H'_{m-1}(\mathbb{Z}) \rightarrow \dots
 \end{array}$$

righe esatte per $LES(H/H')$

$\downarrow$ isomorf (detto sopra)
 $\downarrow$ isomorf (ipotesi induttiva)

$\Rightarrow H_m(X) \rightarrow H'_m(X)$ isomorfismo

II. Caso $A \neq \emptyset$

$$H_m(A) \rightarrow H_m(X) \rightarrow H_m(X, A) \rightarrow H_{m-1}(A) \rightarrow H_{m-1}(X)$$

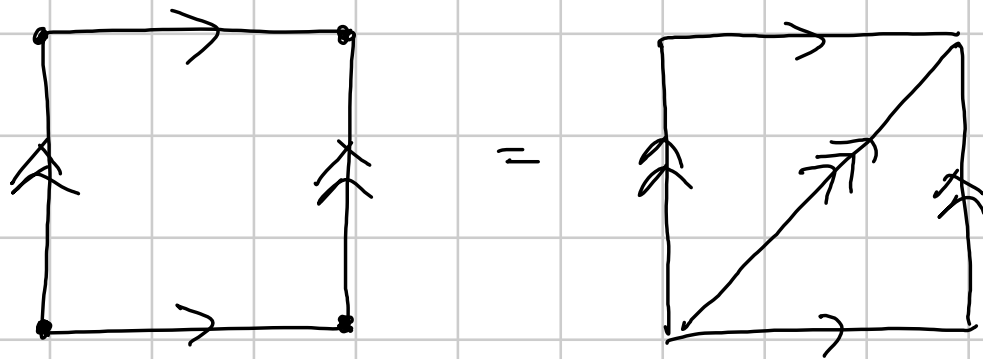
$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H'_m(A) & \rightarrow & H'_m(X) & \rightarrow & H'_m(X, A) & \rightarrow & H'_{m-1}(A) \rightarrow H'_{m-1}(X) \end{array}$$

$\downarrow$: isomorfismi per caso assoluto $\Rightarrow$ ok



————— o —————

Oss: il minimo numero di simplessi che servono a triangolare il toro è 14.



non è complesso simpliciale

Notazione:

$$\Delta_m = \text{Conv}(e_0, \dots, e_m) \subset \mathbb{R}^{m+1};$$

$$\varphi_j^{(m)}: \Delta_{m-1} \rightarrow \Delta_m$$

$$\varphi_j(e_i) = \begin{cases} e_i & i < j \\ e_{i+1} & i \geq j \end{cases} \quad j=0, \dots, m$$

(parametrizzazione via Δ_{m-1} delle facce di Δ_m opposte a e_j
 — ottenute usando l'ordinamento indotto) —

Def : Chiamo Δ -complesso su uno sp. top. X una
 struttura $\mathcal{J} = \{ \sigma_\alpha : \alpha \in A \}$ dove

$$\sigma_\alpha : \Delta_{m(\alpha)} \rightarrow X \text{ continua}$$

$$1. \sigma_\alpha|_{\text{int}(\Delta_{m(\alpha)})} \text{ \u00e9 iniettiva} \quad 2. X = \bigsqcup_{\alpha \in A} \sigma_\alpha(\text{int}(\Delta_{m(\alpha)}))$$

$$3. \sigma_\alpha \circ \varphi_j^{(m(\alpha))} \in \mathcal{J} \quad \forall \alpha \in A, \forall j = 0, \dots, m(\alpha)$$

4. $\{ \sigma_\alpha(\Delta_m(\alpha)) : \alpha \in A \}$ ric. fond. di X

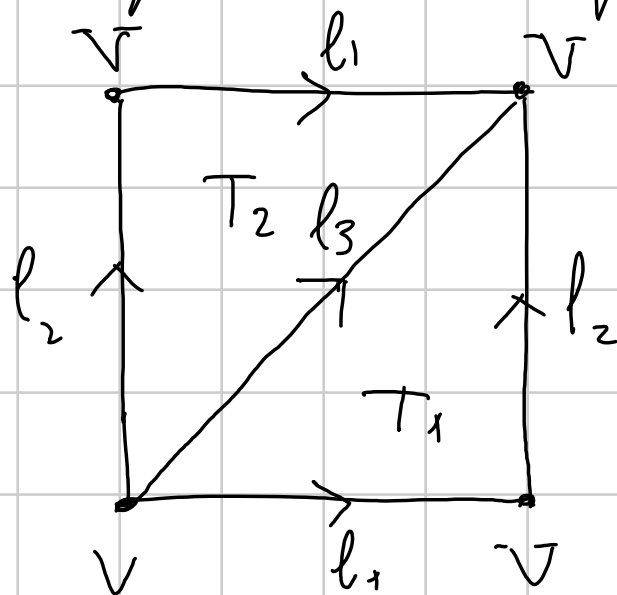
Proprietà 1+2 : X è unione disgiunta di singlari parametrizzati aperti con la parametrizzazione che si estende ai singlari chiusi (eventualmente non iniettivo)

Proprietà 3 : restringendo la chiusura di una parametrizzazione a una faccia di Δ_m , modulo le par. causali delle facce di Δ_m , ho un'altra parametrizzazione della struttura.

Overo: Sui semplici astratti, le cui immagini in X può non essere iniettive, ho un ordinamento dei vertici; ed esso è coerente passando alle facce -

Esempio:

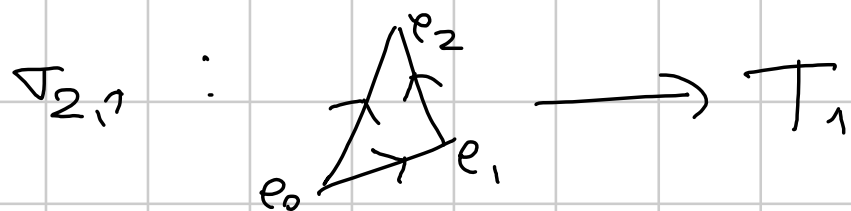
$$\sigma_0 : e_0 \mapsto V$$



$$\sigma_{1,j} : [e_0, e_1] \rightarrow l_j \quad \text{in modo orientato}$$

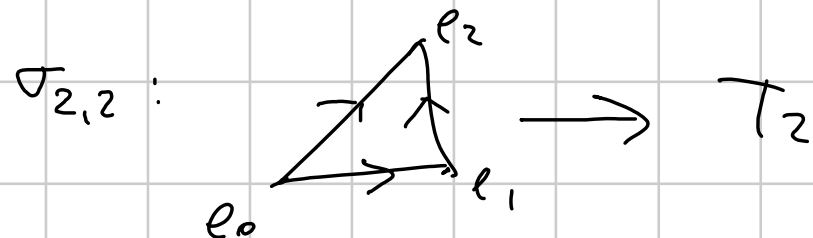
Str. di Δ -comp.

$$J = \{ \underbrace{\sigma_0}_{0\text{-dim}}, \underbrace{\sigma_{1,1}, \sigma_{1,2}, \sigma_{1,3}}_{1\text{-dim}}, \sigma_{2,1}, \sigma_{2,2} \}$$



$$[e_0, e_1] \rightarrow l_1 \quad [e_0, e_2] \rightarrow l_3$$

$$[e_1, e_2] \rightarrow l_2$$

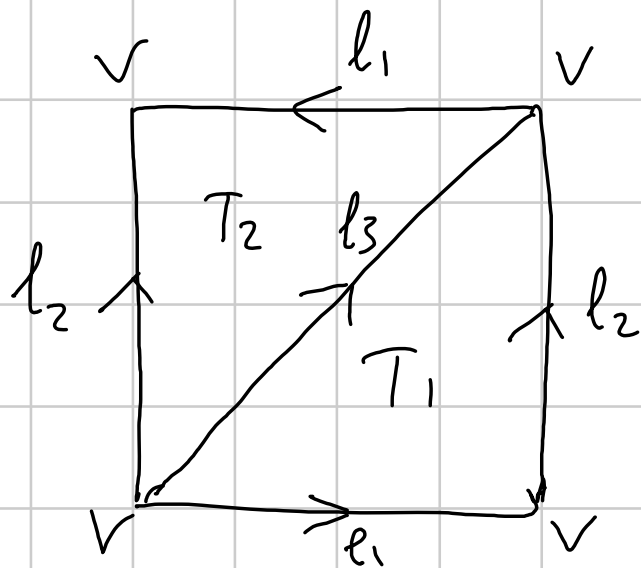


$$[e_0, e_1] \rightarrow l_2$$

$$[e_0, e_2] \rightarrow l_3$$

$$[e_1, e_2] \rightarrow l_1$$

Klein



$\sigma_{2,1} :$

$$[e_0, e_1] \rightarrow l_1$$

$$[e_1, e_2] \rightarrow l_2$$

$$[e_0, e_2] \rightarrow l_3$$

$\sigma_{2,2} :$

$$[e_0, e_1] \rightarrow l_3$$

$$[e_1, e_2] \rightarrow l_1$$

$$[e_0, e_2] \rightarrow l_2$$

$$\overline{D_{ss}}: X = \left(\begin{array}{c} \text{Triangle with arrows } l_1, l_2, l_3 \text{ and } \tau \\ \text{Triangle with arrows } l'_1, l'_2, l'_3 \text{ and } \tau' \end{array} \right) \quad l_j = l'_j$$

Non è un Δ -complesso senza suddividere;

$$\sigma'_2: \begin{array}{l} [e_0, e_1] \rightarrow l'_1 \\ [e_1, e_2] \rightarrow l'_2 \\ [e_0, e_2] \rightarrow l'_3 \end{array}$$

σ_2 : non ci riesce

Δ_m un Δ -complesso chiaro

$$\text{Simplesso } \mathbb{I}_m(\sigma_\alpha) = \sigma_\alpha(\Delta_m(\alpha))$$

Dico che $\sigma_\alpha(\varphi_j^{(m(\alpha))}(\Delta_{m-1}))$ è faccia
di codim-1 di $\sigma_\alpha(\Delta_m(\alpha))$

- F è faccia di G se esistono $F = F_0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_k = G$
t.c. F_{j-1} è faccia di codim-1 di F_j , $j=1, \dots, k$ -