

ETA 13/10/15

Algo per pres. $\pi_1(|K|)$ e $H_1(|K|)$
 $\leadsto H_1 = \text{Ab}(\pi_1) -$

$|K|$ prof se $K = K^{(1)}$; $|K|$ connesso $\Leftrightarrow$
 $\forall v_0, v_1 \in K^{(0)} \exists$ camm.

simpliciale semplice che li unisce -

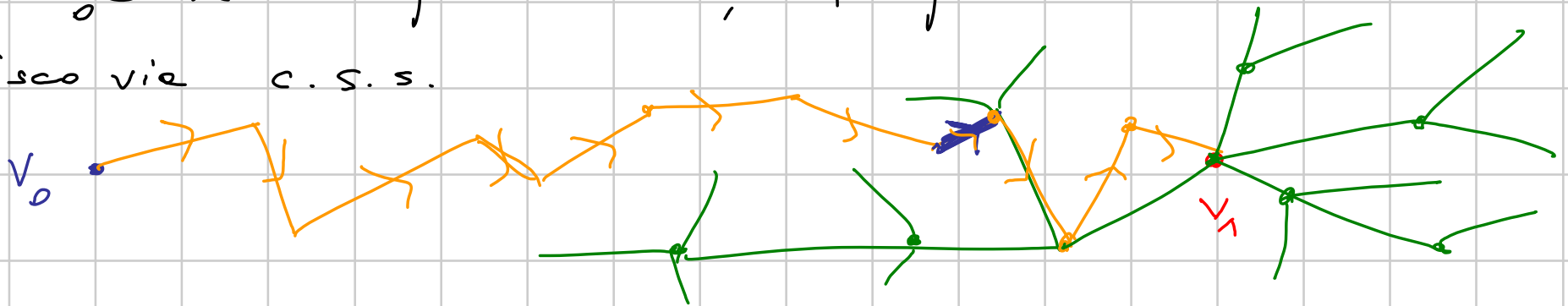
Albero: prof senza cicli simpliciale semplice (+ connesso)

Lemma: $\mathcal{A}$ albero $\Rightarrow \forall v_0, v_1 \in \mathcal{A}^{(0)} \exists!$ cammino
 simpliciale semplice da v_0 a v_1 .

Lemma: $|\mathcal{K}|$ connesso, $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}^{(1)}$ albero massimale
 $\Rightarrow \mathcal{A} \supset \mathcal{K}^{(0)}$.

Dim: $v_0 \in \mathcal{K}^{(0)} \setminus \mathcal{A}^{(0)}$, $v_1 \in \mathcal{A}^{(0)}$

Li unisco via c.s.s.



considero e = primo lato del cammino con
un estremo $\notin \mathcal{F}$ e l'altro $\in \mathcal{F}$.

$\Rightarrow \mathcal{F}$ è albero.

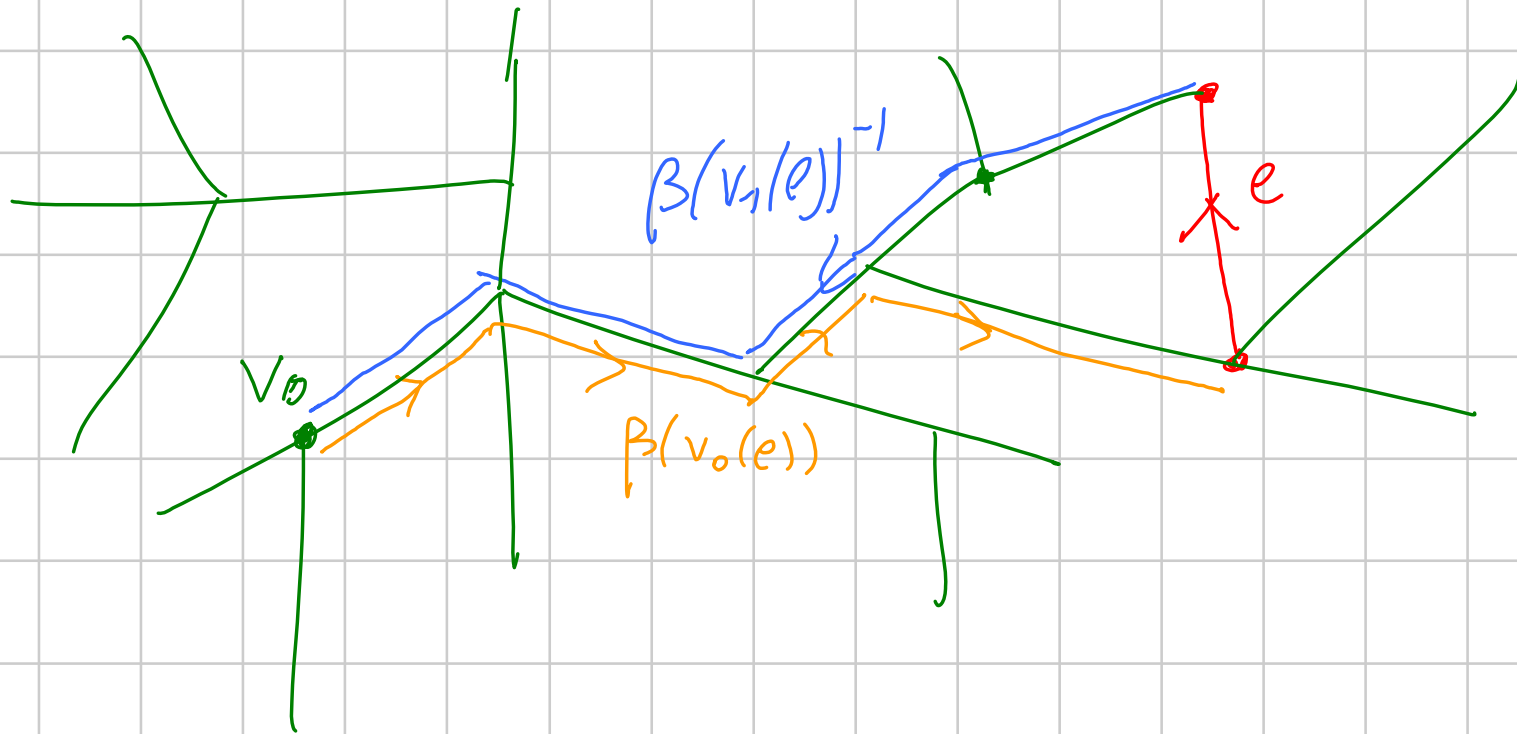


Fisso X con $X = |X|$ connesso (din. qualsiasi) —

Fisso $\mathcal{F} \subset X^{(1)}$ albero max; $v_0 \in \mathcal{F}^{(0)} = X^{(0)}$

Dato $v \in X^{(0)}$ sia $\beta(v)$ l'unico c.s.s. che unisce v_0 a v .

Dato $e \in X^{(1)} \setminus \mathcal{F}$ ponga $\alpha(e) = \beta(v_0(e)) \cdot e \cdot \beta(v_1(e))^{-1}$.



Given $T \in \mathcal{K}^{[2]}$

$$\text{Since } \partial T = e_1^{\varepsilon_1} \cdot e_2^{\varepsilon_2} \cdot e_3^{\varepsilon_3}$$

$$e_1, e_2, e_3 \in \mathcal{K}^{(1)}, \quad \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\}$$

Oss: ho 6 modi per farlo
 3 per vertice iniziale, 2 per verso -

Sia $\pi(T) = \alpha(e_1)^{\epsilon_1} \cdot \alpha(e_2)^{\epsilon_2} \cdot \alpha(e_3)^{\epsilon_3}$ e noto
 che i 6 modi danno parole coniugate o inverse
 fra loro $\langle \{\alpha(e) : e \in \mathcal{K}^{(1)} \setminus \mathcal{F}\} \rangle$

Teo: $\pi_1(X) = \langle \{\alpha(e) : e \in \mathcal{K}^{(1)} \setminus \mathcal{F}\} \mid \{\pi(T) : T \in \mathcal{K}^{(2)}\} \rangle$

Con: $\pi_1(X) = \pi_1(|\mathcal{K}^{(2)}|)$.

(Usando VKS: $X = U \cup V$ aperti connessi,
con $U \cap V$ connesso

$$u: U \cap V \hookrightarrow U, \quad v: U \cap V \hookrightarrow V$$

$$\Rightarrow \pi_1(X) = \frac{\pi_1(U) * \pi_1(V)}{N(\{u_*(\sigma) \cdot v_*(\sigma)^{-1} : \sigma_1 \in \pi_1(U \cap V)\})}$$

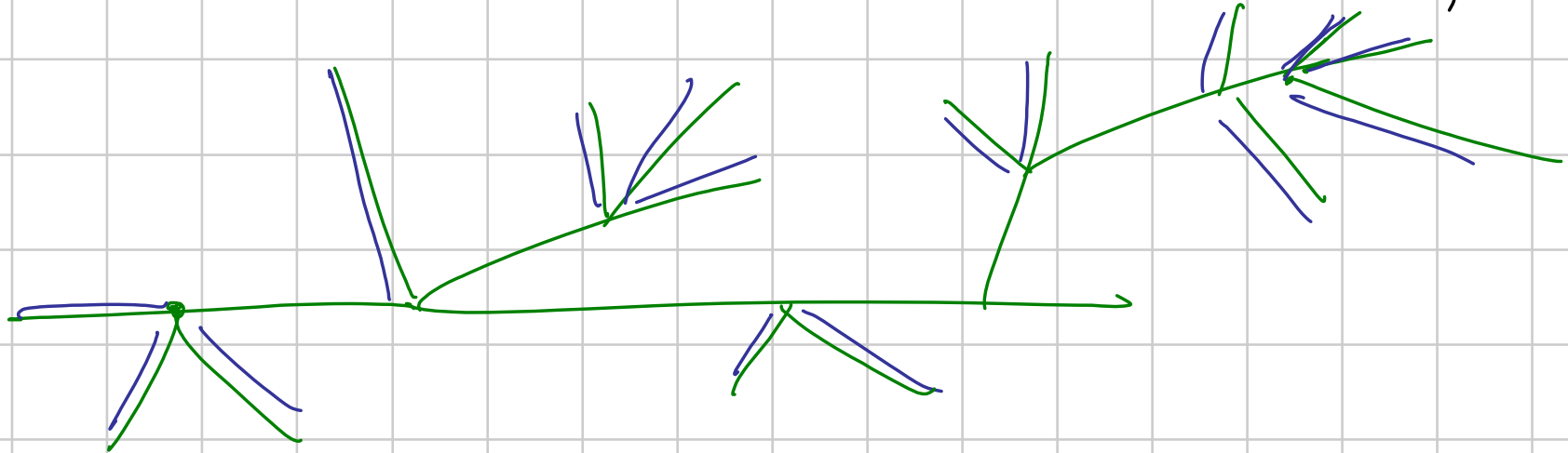
Passo 1: dimostriamo che $\pi_1(K^{(1)}) = \langle \{\alpha(e) : e \in K^{(1)} \setminus A\} \rangle$.

Per induzione su $\#(K^{(1)} \setminus A)$ -

Passo base : $\pi_1(\mathbb{A}) = 1$.

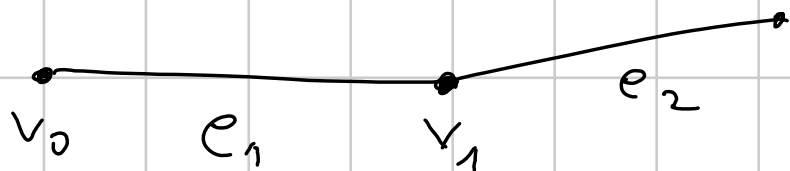
Per induzione su $\# \mathbb{A}^{(0)}$. Passo base : $\mathbb{A} = \bullet$ ✓

Passo induttivo : provo che $\mathbb{A}$ ha almeno un
lato e "libero" cioè con un solo estremo su $\mathbb{A} \setminus \text{int}(\mathbb{A})$.



Prendo $v_0 \in \mathcal{A}^{(0)}$, e_1 con $v_0 = v_0(e_1)$.

e_1 libero? Se no: $\exists e_2$ t.c. $v_0(e_2) = v_1(e_1)$
 e_2 libero? Se no...

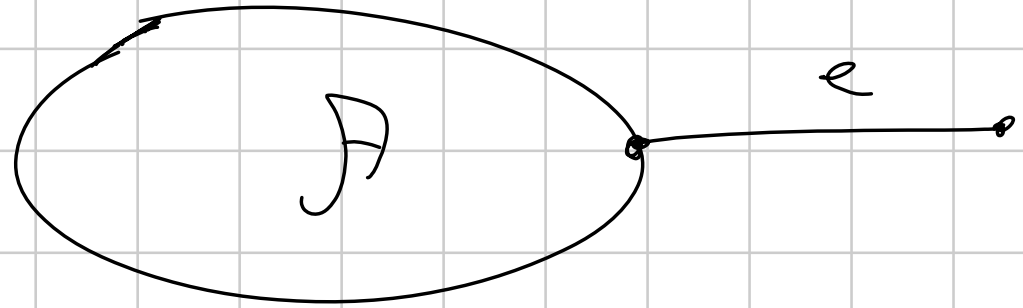


Se non trovo mai e_i libero, poiché $\# \mathcal{K}^{(1)} < +\infty$
 creo un ciclo simpliciale semplice -

Ona sia e libero $\Rightarrow \mathcal{A} \setminus e$ albero connesso

$$e \quad \mathcal{A} \simeq \mathcal{A} \setminus e$$

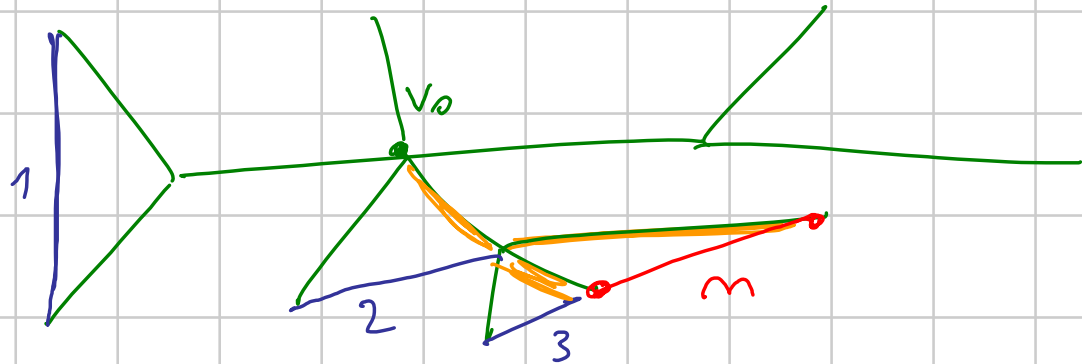
↖ retraction per deformazione.



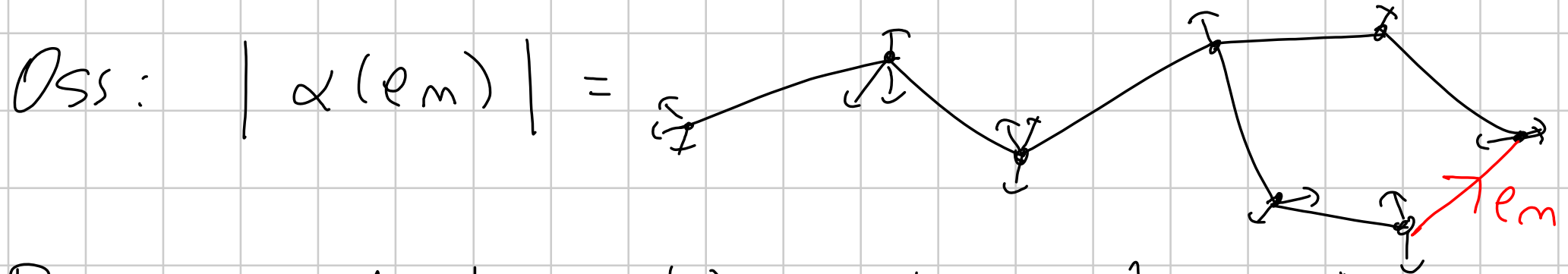
Passo induttivo del passo 1.

$$\pi_1(\mathcal{A} \cup \{e_1, \dots, e_m\}) = \langle \{\alpha(e_i) : i = 1 \dots m\} \rangle$$

($m=0$ p. base) -



Pougo $U = |\mathbb{A} \cup \{e_1, \dots, e_n\}| \setminus \text{centro di } e_n \simeq |\mathbb{A} \cup \{e_1, \dots, e_{n-1}\}|$



Pougo $V = N_\varepsilon(|\alpha(e_n)|) \simeq |\alpha(e_n)| \simeq \mathbb{S}^1$

$$\Rightarrow \pi_1(V) = \mathbb{Z} = \langle \alpha(e_n) \rangle$$

On $U \cap V \simeq \text{pto} \Rightarrow \pi_1 = 0$

$$\Rightarrow \pi_1(|\mathbb{A} \cup \{e_1, \dots, e_n\}|) = \pi_1(|\mathbb{A} \cup \{e_1, \dots, e_{n-1}\}|) * \langle \alpha(e_n) \rangle$$

$$= \langle \{x(z_i) : i = 1 \dots n\} \rangle.$$

Passo 2: Se $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(z)}$ e $T \in \mathcal{H}^{(z)}$

$$\Rightarrow \pi_1(|\mathcal{H}|) = \langle \pi_1(\mathcal{H} \setminus T) \mid \pi(T) \rangle.$$

$$U = |\mathcal{H}| \setminus \text{centro di } T \simeq |\mathcal{H} \setminus T|$$

$$V = N_{\mathcal{E}}(T) \simeq \text{ptto}$$

$$U \cap V = N_{\mathcal{E}}(T) \setminus \text{centro di } T \simeq T \setminus \text{centro di } T$$

$$\simeq \partial T \simeq \mathbb{S}^1$$

è la base
di topologia
in ogni
ptto

Quindi $\pi_1(U \cap V) = \mathbb{Z} = \langle \pi(T) \rangle$

$$\pi_1(|\mathcal{H}|) = \frac{\pi_1(|\mathcal{H} \setminus T|) \times 1}{N / \pi(T)}$$

caso
oppo
su

Passo 3: $\mathcal{H} = \mathcal{H}^{(p)}$ $p \geq 3$
 $\sigma \in \mathcal{H}^{(p)}$

$$\Rightarrow \pi_1(|\mathcal{H}|) = \pi_1(|\mathcal{H} \setminus \sigma|)$$

Come sopra solo due $U \cap V \cong \partial \sigma = S^{p-1}$ e s.c. $\square$

Then: $H_1(X) = \langle \{ \alpha(e) : e \in X^{(1)}, \nabla \} \mid [\alpha(e), \alpha(e')] \rangle$
 $\{ \tilde{\alpha}(T) : T \in X^{(2)} \}$.

Dim: $H_1 = Z_1 / B_1$

Se provo che $Z_1 = \langle \{ \alpha(e) : e \in X^{(1)}, \nabla \} \mid [\alpha(e), \alpha(e')] \rangle$
 concludo subito -

Ovvio che $\alpha(e) \in Z_1$ -

Non ci sono altre relazioni tra loro oltre $[\cdot, \cdot]$:

$$\sum_{e \in X^{(1)}, \nabla} m(e) \cdot \alpha(e) = 0$$

il coeff. di $e \in X^{(1)} \setminus A$ nelle Σ è $m(e)$
 $\Rightarrow m(e) \equiv 0$ —

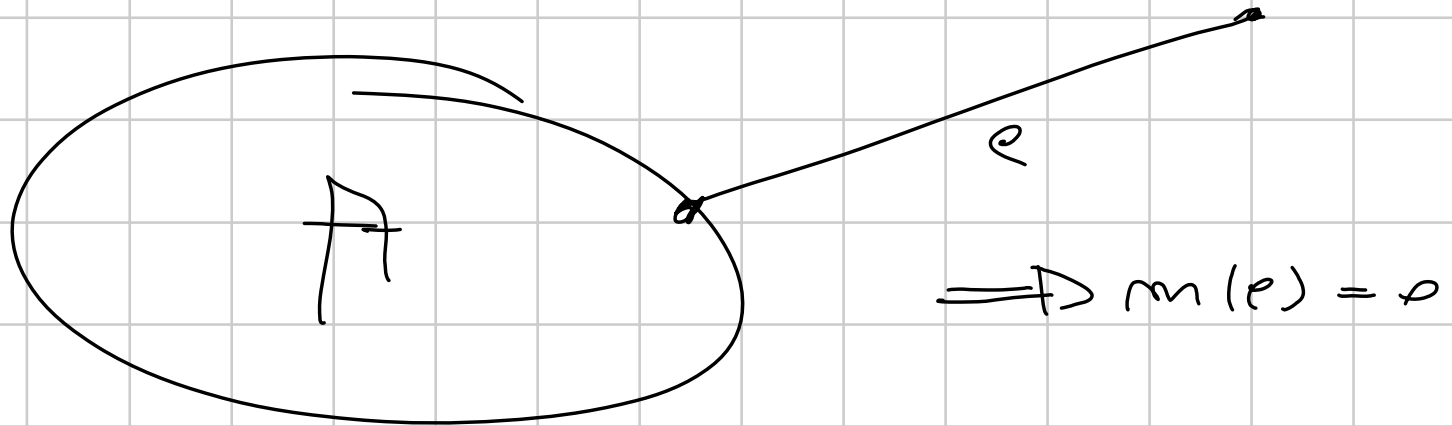
Generano Z_1 : $\sum_{e \in X^{(1)}} m(e) \cdot e \in Z_1$

$$\sum_{e \in X^{(1)}} m(e) \cdot e - \sum_{e \in X^{(1)} \setminus A} m(e) \cdot \alpha(e) \in Z_1$$

$$\underbrace{\hspace{10em}}_{\sum_{e \in A^{(1)}} m(e) \cdot e}$$

$\Rightarrow$ dentro $\mathcal{A}$ ho un ciclo nel senso delle catene.

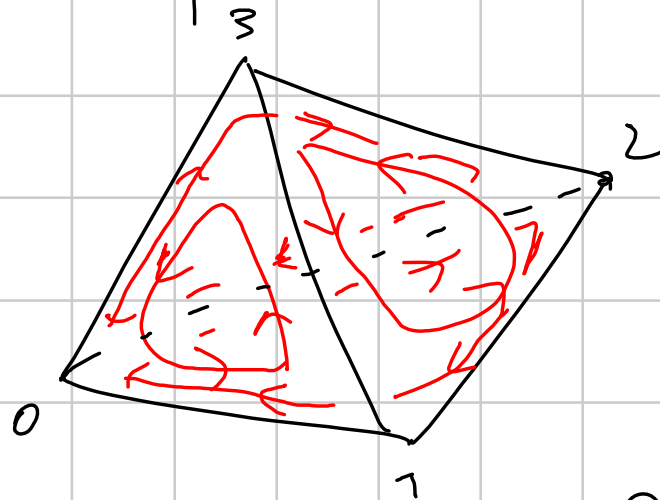
Induttivamente su $\# \mathcal{A}^{(0)}$ provo che è 0:
 $\exists e$ libero:



ES: σ 3-simpleso. Calcolo $H_2(\partial\sigma) = \mathbb{Z}$.
 (oss: $\partial\sigma \cong_{\text{omeo}} S^2$.)

Oriento le 2-facce di $\partial\sigma$ come bordo di σ

$$T_j = \text{opp. a } j$$



coeff. di $\text{cov}(i,j)$ in
 $\partial(\sum m_l T_l) \quad \bar{e}$

$$\pm (m_\alpha - m_\beta)$$

$$\text{dove } \{\alpha, \beta, i, j\} = \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\Rightarrow Z_2 = \mathbb{Z} = \langle T_0 + T_1 + T_2 + T_3 \rangle$$

$$B_2 = 0 \quad ((\partial \sigma)^{[3]} = 0)$$

$$\Rightarrow H_2 = \mathbb{Z}.$$

□

$$\text{SCOPO: } |K| \simeq |\mathbb{Z}| \Rightarrow H_*(K) \simeq H_*(\mathbb{Z}).$$

Def: chiamiamo $f: K \rightarrow \mathcal{L}$ **simpliciale** ma

$f: |K| \rightarrow |\mathcal{L}|$ t.c.

- $\sigma \in K \Rightarrow \text{Conv}(f(\sigma^{[0]})) \in \mathcal{L}$
- $\sigma = \text{Conv}(v_0, \dots, v_m) \quad f(\sum t_i v_i) = \sum t_i f(v_i)$

Oss: f è determinata da $f_0 = f|_{K^{[0]}} : K^{[0]} \rightarrow \mathcal{L}^{[0]}$

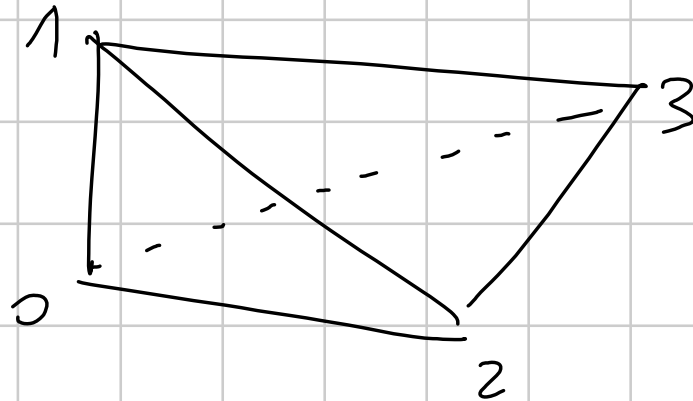
Viceversa $f_0: K^{[0]} \rightarrow \mathcal{L}^{[0]}$

induce una $f: K \rightarrow \mathcal{L}$ simpliciale $\forall \sigma \in K \exists \tau \in \mathcal{L}$ t.c.

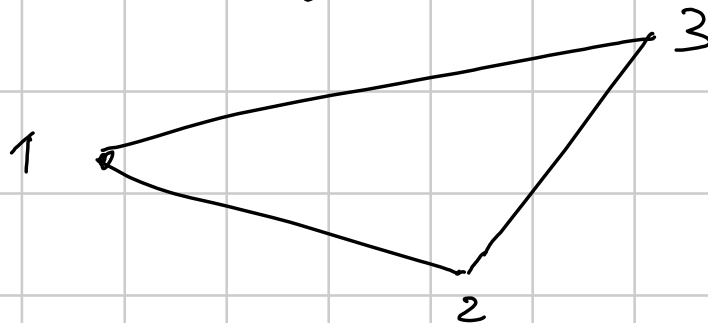
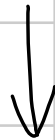
$$\Leftrightarrow f(\sigma^{[0]}) = \tau^{[0]}$$

insieme di punti (senza ripetizioni)

Es:



$0, 1 \mapsto 1$
 $2 \mapsto 2$
 $3 \mapsto 3$



Oss: simplicial
 $\Downarrow$
continue —

Scopo I. provare che f simpliciale induce un map in H_*
II. provare che f continua può essere approssimata con
 g simpliciale ($g \simeq f$)

III. $f_1 \simeq f_2$ simpliciali $\Rightarrow f_{1*} = f_{2*}$
 $\uparrow$
omotopia continua

$(\Rightarrow (X \simeq Y \Rightarrow H_*(X) \cong H_*(Y)).)$

① $f: K \rightarrow L$ simpliciale. K, L orientati.
Definisco $f_m: C_m(K) \rightarrow C_m(L)$ come

$$X^{(m)} \ni \sigma \mapsto f_m(\sigma) = \begin{cases} \delta(\sigma) \cdot 1(\sigma) & \text{se dim} \\ 0 & 1(\sigma) = m \\ & \text{al} \end{cases}$$

Leu: $(f_m)_{m=0}^{+\infty} : C_*(X) \rightarrow C_*(\mathbb{Z})$
mappe tra complessi di cochaine -

Dim: Devo vedere che
commuta -

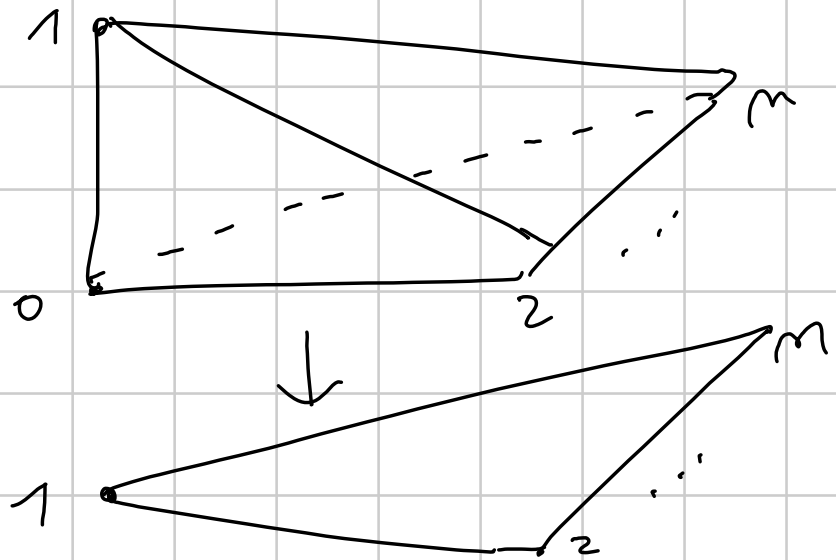
$$\begin{array}{ccc} C_m(X) & \xrightarrow{f_m} & C_m(\mathbb{Z}) \\ \partial_m^X \downarrow & & \downarrow \partial_m^{\mathbb{Z}} \\ C_{m-1}(X) & \xrightarrow{f_{m-1}} & C_{m-1}(\mathbb{Z}) \end{array}$$

Basta su $\sigma \in \mathcal{K}^{[m]}$; tre casi:

1) $\dim f_m(\sigma) = m$: facile f_{m-1} è omneo lineare
anche sulle facce di $\partial\sigma$

3) $\dim f_m(\sigma) \leq m-2$: $f_m(\sigma) = 0$ $f_{m-1}(\partial\sigma) = 0$
facile

2) $\dim f_m(\sigma) = m-1$:



$$\begin{aligned}
 f_m(\sigma) &= 0 & f_{m-1}(\partial_m^{\mathbb{Z}} \sigma) &= f_{m-1}(-C_{0,1,\dots,m} \\
 & & & \quad + C_{0,1,\dots,m}) \\
 & & &= -C_{0,1,\dots,m} + C_{0,1,\dots,m} = 0
 \end{aligned}$$

II. Teorema di approx. simpliciale : $(X=|K|, Y=|L|)$ ▣

$$\begin{aligned}
 f: |K| &\longrightarrow |L| && \text{continua} \\
 \exists \mathcal{H} &< K, & g: \mathcal{H} &\longrightarrow L \text{ simpliciale} \\
 \text{t.c.} & \forall x \in X \exists \tau \in \mathcal{L} \text{ t.c.} \\
 & f(x), g(x) \in \tau.
 \end{aligned}$$

Oss: (1) $g \simeq f$ infatti $t \cdot p(x) + (1-t) \cdot f(x)$
ha senso perché $\bar{e}$ in τ

(2) $\forall \varepsilon > 0$ se ammetto anche $M < L$ allora
una $g: H \rightarrow M$ simpliciale con $\|f - g\| \leq \varepsilon$ -

Infatti: prima suddivido L e una M con
 $\max diam(M) < \varepsilon$; poi applico il Teo -

Oss : posso trovare M :

$$\mathcal{L}, \underbrace{\left(\left\{ [m \cdot \varepsilon, (m+1) \varepsilon] : m \in \mathbb{Z} \right\} \right)^N}_{\text{complesso pol' topole}} \cap |\mathcal{L}|$$

ve bene : M suddivisione simpliciale comune —