

ETA 5/11/15

$$\Sigma = P/w$$

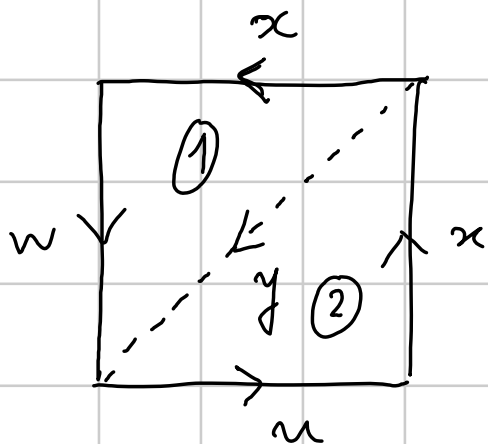
w parole in cui ogni lettera compare 2 volte
con esponenti $++$, $+-$, $--$

Tesi: posso ridurmi a $[a_1, b_1] \dots [a_k, b_k]$ o $a_1^2 \dots a_k^2$

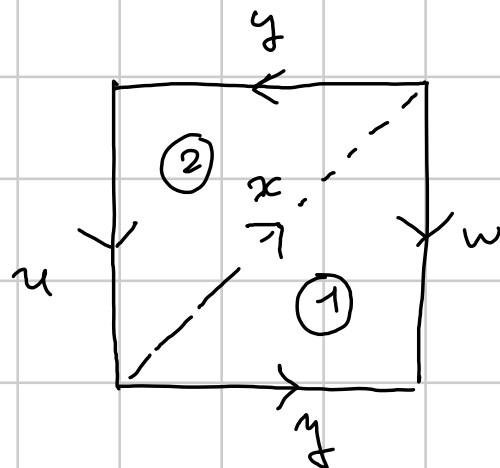
Step 1: Possiamo supporre che Σ abbia un solo vertice

Fatto: $xxwu \cong xw^{-1}xu$
e tale ormeo non rovina tappa 1.

$x, y, \dots$ lettere
 $w, u, v, \dots$ parole

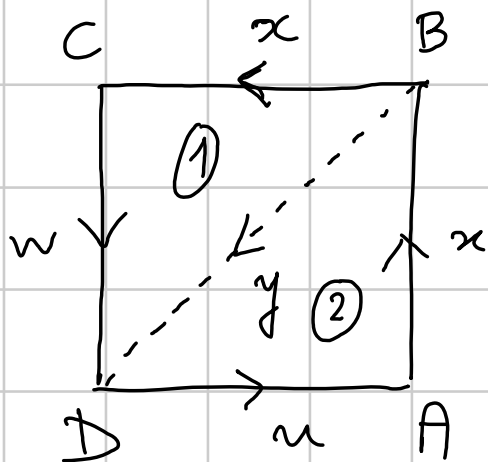


$\approx$

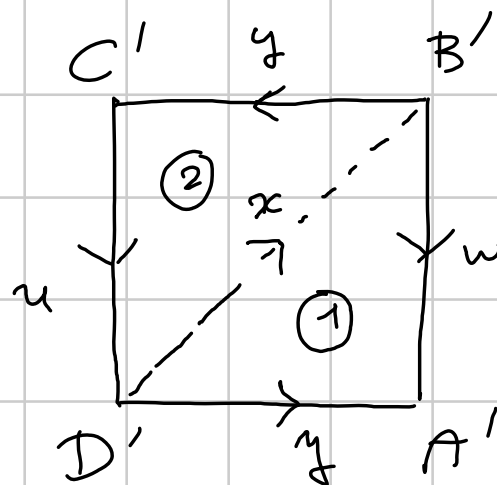


$$= y w^{-1} y u$$

$$= x w^{-1} x u$$



$\approx$



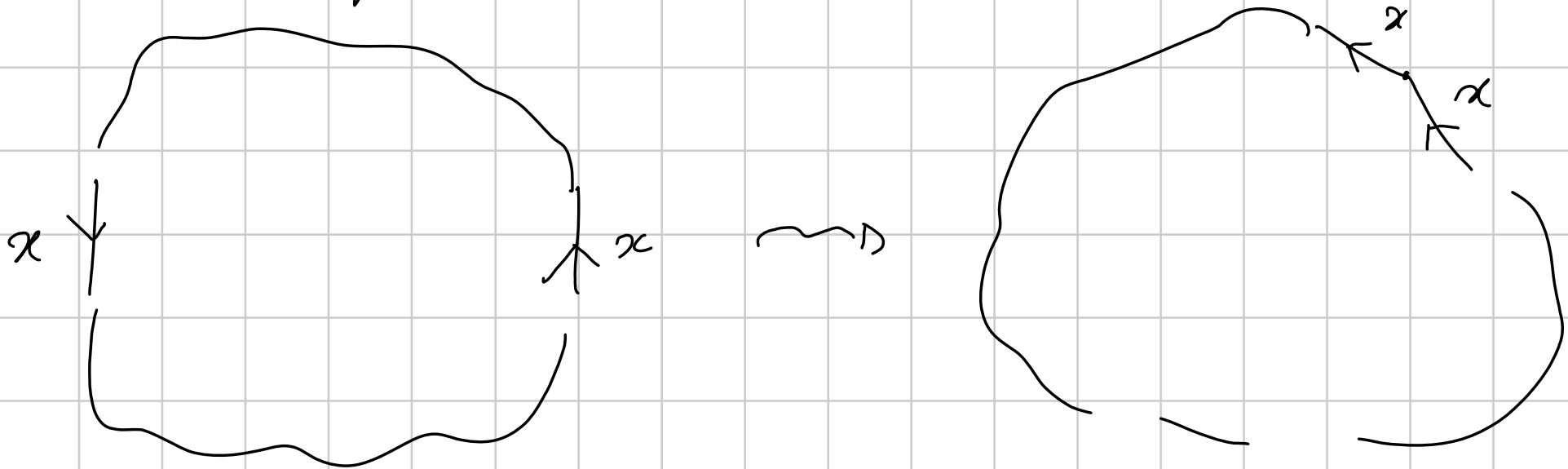
So che in $\mathbb{P}/_{xx\sim u}$ ho $A=B=C=D$ tutti quelli il cui.

Ore x dice $A=B=C$ dunque w, u devono
dire $(D=A \text{ oppure } D=C)$ e tutti gli interni uguali
tra loro e agli esterni.

In $\mathbb{P}/_{yw\sim yu}$ y dice $D'=B'$ e $A'=C'$ -
Inoltre w, u dicono $(C'=D' \text{ oppure } C'=B')$
e tutti gli interni uguali tra loro e agli esterni -
 $\Rightarrow$ anche dopo sono tutti uguali -

Steno per le mosse $xwx y \longrightarrow xxw^{-1}u$

Step 2: Senza rovinare lo step 1 posso "raccolgere i P^2 sparsi"



Conseguenze del fatto:

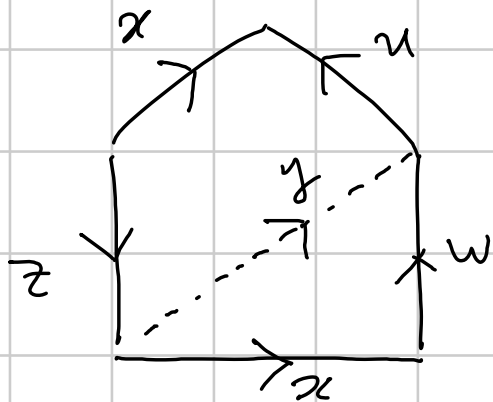
- Klein $a b a b^{-1} \cong a a b^{-1} b^{-1} \cong a a b b \cong \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$
- $\mathbb{P}^2 \# T = a \underbrace{b a^{-1} b^{-1}}_T c c = a \underbrace{b c b a c}_T = a b b c^{-1} a c = \underbrace{b b c^{-1}}_{\mathbb{P}^2} \underbrace{a c a}_K$
 $= \mathbb{P}^2 \# \text{Klein} = 3 \cdot \mathbb{P}^2$

Enunciato alternativo classificazione: le k sup sono
 $k \cdot T$ $k \geq 0$ orient

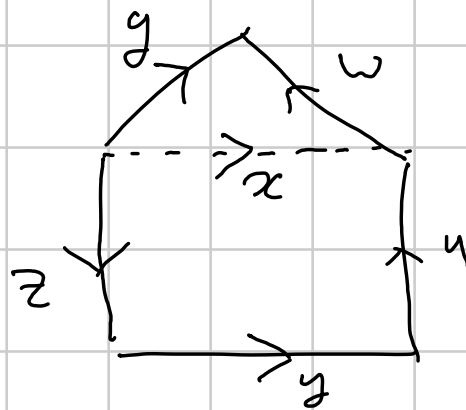
$$\left. \begin{array}{l} k.T \# P^2 = (2k+1)P^2 \quad k \geq 0 \\ k.T \# k\text{lin} = (2k+2)P^2 \quad k \geq 0 \end{array} \right\} \text{orient}$$

$$\Rightarrow k.T \# h.P^2 \quad k \geq 0 \quad h = 0, 1, 2$$

Fatto: $xwx^{-1}z = xux^{-1}z$ senza rovinare topi 1 & 2.



$\approx$



$$\begin{aligned} &= yuxwy^{-1}z \\ &= xux^{-1}z \end{aligned}$$

Lemma 3: possono raccogliere i tori sparsi

$$x w y u x^{-1} v y^{-1} z \cong x y x^{-1} y^{-1} t$$

↑
↑
↑
↑
toro sparso

$$x (w)(y u) x^{-1} v y^{-1} z = x y (u w) (x^{-1} v) y^{-1} z = x y x^{-1} v u w y^{-1} z$$

$$= y x^{-1} (v u w) (y^{-1} z) x = y x^{-1} y^{-1} z v u w x = x y x^{-1} y^{-1} z v u w$$

Se tramite le tappe mi sono ridotto ad avere solo $\mathbb{P}^2$ e T compatte e eventualmente tramite $\mathbb{P}^2 \# T = 3\mathbb{P}^2$ mi riconduco a solo $\mathbb{P}^2$ o solo T = Tesi.

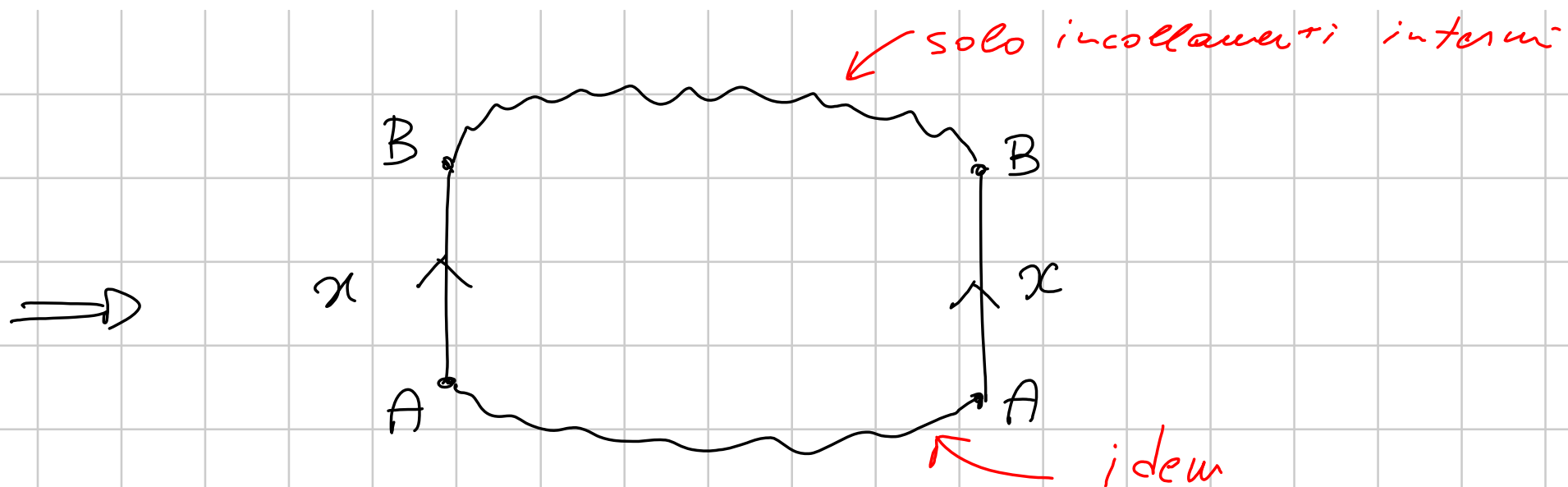
Le occorrenze di $\alpha \dots \alpha \dots$ sono diventate $\alpha\alpha \dots$

Se oltre ad essi ho qualcosa che non è $[\alpha, \gamma]$ devo avere:

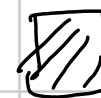
$$\underbrace{\alpha \dots \alpha \dots}_{\text{se qui compare}} \quad \underbrace{\alpha^{-1} \dots \alpha^{-1}}_{\text{allora non può comparire}} \quad \text{né } \gamma \text{ (e no... } \mathbb{P}^2) \text{ né } \gamma^{-1} \text{ (e no... } T)$$

se qui compare
né γ

allora non può comparire
né γ^{-1} (e no... $\mathbb{P}^2$) né γ^{-1} (e no... T)

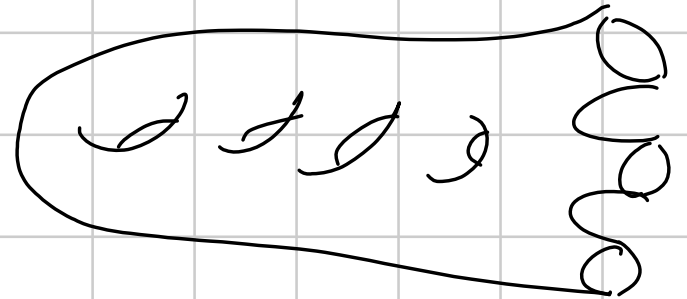


contraddice la tappa 1 : $A \neq B$ _



Con (classificare sup. tipo. finito = cpt)

Sono $k.T$ con n buchi
 $k.P^2$ con n buchi.



Infatti : • fare un buco = togliere B^2
 $\bar{c}$ operaz. canonica (omopeneità)

• fare un buco = attaccare D^2 a $S^1 \subset \partial \Sigma$
 $\bar{c}$ operaz. canonica

infatti ogni arco di S^1 si estende a D^2 (residuo) -



Def: omologie relative; X compl. simpl. orientato,
 $A \subset X$ sottocomplesso

$$C_n(X, A) = \langle \sigma \in X^{[n]} \setminus A^{[n]} \rangle = \frac{X^{[n]}}{A^{[n]}}$$

Fatto: Ben def $\partial_n^{(X, A)} : C_n(X, A) \rightarrow C_{n-1}(X, A)$

$$\sigma \in \mathcal{K}^{[m]} \setminus \mathcal{I}^{[m]}, \quad \partial_n^{(\kappa, \tau)} \sigma = \sum_{\substack{\tau \in \mathcal{K}^{[m-1]} \setminus \mathcal{I}^{[m-1]} \\ \tau < \sigma}} \varepsilon(\sigma, \tau) \cdot \tau$$

Inoltre: $\partial_{n-1}^{(\kappa, \tau)} \circ \partial_n^{(\kappa, \tau)} = 0$.

Infatti se $\sigma \in \mathcal{K}^{[m]} \setminus \mathcal{I}^{[m]}$
 $\eta \in \mathcal{K}^{[m-2]} \setminus \mathcal{I}^{[m-2]}, \quad \eta < \sigma$

allora le due facce $\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{K}^{[m-1]}$ di σ
 che contengono τ , non sono in $\mathcal{I}^{[m-1]}$
 $\Rightarrow$ coeff di η in $\partial_{n-1}^{(\kappa, \tau)} (\partial_n^{(\kappa, \tau)} \sigma)$ è

lo stesso che in $\partial_{n-1}^K (\partial_n^K \sigma) \Rightarrow \bar{e} \cdot 0$

$\Rightarrow \left(C_n(K, \mathbb{Z}), \partial_n^{(K, \mathbb{Z})} \right)_{n=0}^{+\infty}$ complesso di catene

$$\Rightarrow H_n(K, \mathbb{Z}) = \frac{Z_n(K, \mathbb{Z})}{B_n(K, \mathbb{Z})}.$$

Come nel caso assoluto:

- indep. da orientazione.
- omomorfismo canonico e suddivisioni

- $f: (K, \mathcal{A}) \rightarrow (Q, \mathcal{B})$ cioè $f: K \rightarrow Q$, $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{B}$
 simpliciale induce $f_*: H_n(K, \mathcal{A}) \rightarrow H_n(Q, \mathcal{B})$
- tale f_* dipende solo da $f / \sim$
- $H_n(X, A)$ è ben def $/ \cong$ e anche $/ \cong_{rel}$

$$f_0 \cong_{rel} f_1 : (X, A) \rightarrow (Y, B)$$

$$se \exists F: X \times [0, 1] \rightarrow Y$$

$$F(A \times [0, 1]) \subset B$$

$$F(\cdot, j) = f_j \quad j=0, 1.$$

Oss: Non è vero che se $Y \cong X \setminus A$ allora
 $H_*(X, A) = H_*(Y)$. Ad. es.

$$X = D^2, A = S^1 = \partial D^2 \quad X \setminus A \cong *$$

$$H_2(D^2, S^1) = H_2(\Delta_2, \partial \Delta_2) = \frac{\langle \Delta_2 \rangle}{0} = \mathbb{Z}$$

ASSIOMI DELL'OMOLOGIA

ESCISSIONE (excision)

$$X = Y \cup Z \Rightarrow H_*(X, Z) \cong H_*(Y, Y \cap Z)$$

complemi/sotto-complemi
(in part. chiusi)



$$\begin{aligned} C_n(X, Z) &= \langle \sigma \in X^{[n]} \setminus Z^{[n]} \rangle \\ &= \langle \sigma \in Y^{[n]} \setminus (Y \cap Z)^{[n]} \rangle = C_n(Y, Y \cap Z) \end{aligned}$$

+ stessi bound -

LES (long exact sequence) -

Successione esatta di gruppi ab. e omomorfismi $\bar{e}$

$$\dots \rightarrow A_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} A_n \xrightarrow{f_n} A_{n-1} \rightarrow \dots \rightarrow A_0 \rightarrow 0$$

con $\text{Ker}(f_n) = \text{Im}(f_{n+1})$ cioè $\bar{e}$ è un complesso di
cochain con $H_* = 0$.

Oss: $0 \longrightarrow A \xrightarrow{i} B$ esatta $\iff A \xhookrightarrow{i} B$
 $A \xrightarrow{p} B \twoheadrightarrow 0$ esatta $\iff A \twoheadrightarrow_p B$

Def: $0 \longrightarrow K \xrightarrow{i} B \xrightarrow{p} Q \longrightarrow 0$
 esatta si dice esatta corta $\Rightarrow Q \cong B/i(K)$ -

Def: una successione esatta di moduli tra complessi di Cohen è una succ. di omomorf. tra compl. di Cohen che è esatta ad ogni livello:

$$\dots \longrightarrow \mathcal{C}^{(m+1)} \xrightarrow{f^{(m+1)}} \mathcal{C}^{(m)} \xrightarrow{f^{(m)}} \mathcal{C}^{(m-1)} \longrightarrow \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 \dots & \longrightarrow & C_n^{(m+1)} & \xrightarrow{f_n^{(m+1)}} & C_n^{(m)} & \xrightarrow{f_n^{(m)}} & C_n^{(m-1)} \longrightarrow \dots \\
 & & \downarrow \partial_n^{(m+1)} & & \downarrow \partial_n^{(m)} & & \downarrow \partial_n^{(m-1)} \\
 \dots & \longrightarrow & C_{n-1}^{(m+1)} & \xrightarrow{f_{n-1}^{(m+1)}} & C_{n-1}^{(m)} & \xrightarrow{f_{n-1}^{(m)}} & C_{n-1}^{(m-1)} \longrightarrow \dots
 \end{array}$$

- * quadrati commutativi
- * righe esatte

Es: $\mathcal{LCK}$ sottocomplesso, $\mathcal{C} = (C_n)_{n=0}^{+\infty} \Rightarrow$

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}(\mathcal{I}) \xrightarrow{i} \mathcal{C}(\mathcal{K}) \xrightarrow{p} \mathcal{C}(\mathcal{K}, \mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

è una succ. esatta corte di gruppi free cogen. di cotter.

$$0 \longrightarrow C_n(\mathcal{I}) \hookrightarrow C_n(\mathcal{K}) \twoheadrightarrow C_n(\mathcal{K}, \mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

$$\downarrow \partial_n^{\mathcal{I}}$$

$$\downarrow \partial_n^{\mathcal{K}}$$

$$\downarrow \partial_n^{(\mathcal{K}, \mathcal{I})}$$

$$0 \longrightarrow C_{n-1}(\mathcal{I}) \hookrightarrow C_n(\mathcal{K}) \twoheadrightarrow C_n(\mathcal{K}, \mathcal{I}) \longrightarrow 0$$

Teo: $0 \longrightarrow \mathcal{C}' \xrightarrow{i} \mathcal{C} \xrightarrow{P} \mathcal{C}'' \longrightarrow 0$

succ. esatte corte di mappe tra compl. di catene induce

$$\dots \longrightarrow H'_m \xrightarrow{i_{m*}} H_m \xrightarrow{P_{m*}} H''_m \xrightarrow{d_m} H'_{m-1} \xrightarrow{i_{m-1}*} \dots$$

canonica ed esatta.

Con (LES): $A \subset X$ ($X = |K|$, $A = |Z|$, $Z \subset K$
so it's a complex)

$$\Rightarrow \dots \longrightarrow H_m(A) \xrightarrow{i_{m*}} H_m(X) \xrightarrow{j_{m*}} H_m(X, A) \xrightarrow{d_m} H_{m-1}(A) \longrightarrow \dots$$

$$i_m: A \hookrightarrow X$$

$$j_m: (X, \emptyset) \hookrightarrow (X, A)$$

d_m è un bordo
(de spiegare) -

Dim (Teo) : Esatto in H_m

$$H'_m \xrightarrow{i_{m*}} H_m \xrightarrow{p_{m*}} H''_m$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad p_m \circ i_m &= 0 \quad \Rightarrow \quad p_{m*} \circ i_{m*} = 0 \\ &\Rightarrow \quad \text{Im } i_{m*} \subset \text{Ker } p_{m*} \end{aligned}$$

- Sia $[z] \in H_m$, $[z] \in \text{Ker } P_{m*}$, cioè $z \in Z_m$
 e $P_m(z) \in B_m'' \Rightarrow \partial_m z = 0$, $\exists w \in C_{m+1}''$
 t.c. $P_m(z) = \partial_{m+1}'' w$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_{m+1} & \xrightarrow{P_{m+1}} & C_{m+1}'' \longrightarrow 0 \\
 & & \textcolor{red}{u} & & \textcolor{red}{w} \\
 & & \downarrow \partial_{m+1} & & \downarrow \partial_{m+1}'' \\
 \textcolor{red}{x} \quad C_m' & \xrightarrow{i_m} & \textcolor{red}{z} \quad C_m & \xrightarrow{P_m} & C_m''
 \end{array}$$

$$\longrightarrow \exists u \in C_{n+1} \text{ t.c. } w = P_{n+1}(u)$$

$$\text{Ora } P_n(z - \partial_{n+1} u) = P_n(z) - \overset{''}{\partial_{n+1}} P_{n+1}(u) = 0$$

$$\Rightarrow (\text{esattezza in } C_n) \quad \exists x \in C'_n \text{ t.c. } z - \partial_{n+1} u = i_n(x)$$

$$\Rightarrow [z] = [z - \partial_{n+1} u] = [i_n(x)] = i_{n*}([x])$$

Ciò non basta; devo anche provare che $x \in Z'_n$:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \overset{w}{C_{m+1}} \\
 & & \downarrow \partial_{m+1} \\
 \overset{z}{C'_m} & \xrightarrow{i_m} & \overset{z}{C_m} \\
 \downarrow \partial'_m & & \downarrow \partial_m \\
 \overset{0}{C'_{m-1}} & \xrightarrow{i_{m-1}} & C_{m-1}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned}
 i_m(x) &= z - \partial_{m+1} w \\
 i_{m-1}(\partial'_m x) &= \partial_m(i_m(x)) \\
 &= \partial_m z - \partial_m \partial_{m+1} w = 0 + 0 = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \longrightarrow \partial'_m x = 0$$

Costruzione di

$$\begin{aligned}
 & H''_m \xrightarrow{d_m} H'_{m-1} \\
 \text{Sia } [z] \in H''_m, \quad z \in Z''_m
 \end{aligned}$$

$$z \in C_n'', \quad \partial_n'' z = 0$$

$$P_{n+1}(\partial_n w) = \partial_n'' P_n(w) = \partial_n'' z = 0$$

$$\Rightarrow \partial_n w = i_{n-1}(u) \quad (u \text{ unico})$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_n & \xrightarrow{P_n} & C_n'' & \longrightarrow 0 \\
 & & & \downarrow \partial_n & & \downarrow \partial_n'' & \\
 0 & \longrightarrow & C_{n-1}' & \xrightarrow{i_{n-1}} & C_{n-1} & \xrightarrow{P_{n+1}} & C_{n-1}''
 \end{array}$$

w (under C_n) z (under C_n'') u (under C_{n-1}')

Devo vedere: (1) $u \in \mathbb{Z}'_{m-1}$ cioè $\mathcal{I}'_{m-1} u = 0$

(2) cambiando scelto di w la u cambio per B'_{m-1}

(3) cambiando z per B''_m la u cambio per B'_{m-1}

Faccio (1) + (3) : la (2) è caso part. di (3) -

(1)

$$\begin{array}{ccc}
 & & C_m \xrightarrow{P_m} \\
 & & \downarrow \partial_m \\
 & C_{m-1} & \\
 \uparrow i_{m-1} & & \downarrow \partial_{m-1} \\
 C_{m-1} & \xrightarrow{i_{m-1}} & C_{m-1} \\
 \downarrow \partial_{m-1} & & \\
 C_{m-2} & \xrightarrow{i_{m-2}} & C_{m-2}
 \end{array}$$

$$\begin{aligned} i_{n-2}(\partial'_{n-1}(u)) &= \\ &= \partial_{n-1}(i_{n-1}u) \\ &= \partial_{n-1}(\partial_n w) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \partial'_{m+1}(u) = 0$$

$$(3) \quad z \in B_n'' \quad z = \partial_{n+1}'' y \quad y \in C_{n+1}''$$

$$\begin{array}{ccccc}
 & & C_{n+1} & \xrightarrow{p_{n+1}} & C_{n+1}'' & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow \partial_{n+1} & & \downarrow \partial_{n+1}'' & & \\
 & & C_n & \xrightarrow{p_n} & C_n'' & & \\
 & & \downarrow \partial_n & & & & \\
 & & C_{n-1} & & & & \\
 \begin{array}{c} \text{t} \\ \downarrow \partial'_n \end{array} & C_n' & \xrightarrow{i_n} & C_n & & & \\
 \begin{array}{c} \text{w} \\ \downarrow \partial_n \end{array} & & & & & & \\
 \begin{array}{c} 0 \rightarrow \\ \text{u} \end{array} & C_{n-1}' & \xrightarrow{i_{n-1}} & C_{n-1} & & &
 \end{array}$$

$$\exists x \in C_{n+1} \quad \text{s.t.} \quad y = p_{n+1}(x)$$

$$p_n(w - \partial_{n+1} x) = z - z = 0$$

$$\Rightarrow (\text{esattezza in } C_n')$$

$$w - \partial_{n+1} x = i_n(t)$$

$$i'_{n-1} (u - \partial'_n t) = \partial_n w - \partial_n i'_n(t) = \partial_n w - \partial_n w + \partial_n \partial_{n+1}^2 x = 0$$

$\Rightarrow$

$\rightarrow$

$$u = \partial'_n t.$$

(Resta es a th_{23e})