

Esercizi di Matematica

Scienze Biologiche 15/16 – Corso A

(Carlo Petronio)

Foglio del 4/5/2016

Se X è una variabile aleatoria che assume il valore x (in un insieme discreto) con probabilità $p(X = x)$ definiamo:

- *media* di X il valore

$$\mu(X) = \sum_x x \cdot p(X = x)$$

- *varianza* di X il valore

$$\sigma^2(X) = \mu((X - E(X))^2) = \sum_x (x - \mu(x))^2 \cdot p(X = x) = \mu(X^2) - \mu(X)^2$$

Chiamiamo *variabile di Bernoulli* X una nella quale ci sono due esiti, il successo 1 con probabilità p e l'insuccesso 0 con probabilità $1 - p$. Si ha che $\mu(X) = p$ e $\sigma^2(X) = p(1 - p)$

Chiamiamo *variabile binomiale* X il numero di successi nella ripetizione di n variabili di Bernoulli ognuna di parametro p , dunque

$$p(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Si ha che $\mu(X) = n \cdot p$ e $\sigma^2(X) = np(1 - p)$

Chiamiamo *variabile di Poisson* X il numero di successi nella ripetizione di n variabili di Bernoulli, ognuna di parametro p , dove si suppone che p sia molto piccolo e che n sia molto grande; ponendo $\lambda = p \cdot n$ si ha approssimativamente che

$$p(X = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

Si ha che $E(X) = \sigma^2(X) = \lambda$

Esercizio 1 Si eseguono 4 lanci di una moneta e si pone

$$X = \sum_{j=1}^4 t(j) \cdot 2^{j-1}$$

dove $t(j)$ vale 1 se al j -esimo lancio è uscito testa, 0 se è uscito croce. Calcolare $\mu(X)$.

Esercizio 2 Tre sacchetti contengono k , $2k$ e $3k$ Euro. Se X è il contenuto in Euro di un sacchetto scelto a caso, e $\sigma^2(X) = \frac{8}{3}$, quanto vale k ?

Esercizio 3 Un sacchetto contiene 5 monete da un Euro e n gettoni senza valore. Se X è il valore di un pezzo estratto e $\mu(X)$ vale 25 centesimi, quanto vale n ?

Esercizio 4 Per un quesito ci sono k risposte possibili, una sola giusta. Rispondendo a caso al quesito, poniamo $X = 1$ se la risposta è giusta e $X = 0$ se è sbagliata. Se $\sigma^2(X) = \frac{3}{16}$, quanto vale k ?

Esercizio 5 Un giocatore punta su k numeri alla roulette, tra 0 e 36. Poniamo $X = 1$ se vince e $X = 0$ se perde. Se $\sigma^2(X) = \frac{270}{1369}$, quanto vale k ?

Esercizio 6 Verificare algebricamente la formula per $\mu(X)$ dove X è la variabile binomiale, e spiegarla intuitivamente.

Esercizio 7 Qual è la probabilità che lanciando 5 volte un dado esca due volte un punteggio maggiore di 4?

Esercizio 8 Un'urna contiene 13 biglie bianche e 17 nere. In una estrazione con reimmissione di 7 biglie, qual è la probabilità che ne escano 3 bianche?

Esercizio 9 Il 70% degli alberi piantati sopravvivono dopo un anno. Se oggi ne pianto 12, qual è la probabilità che tra un anno ne siano vivi almeno 11?

Esercizio 10 In un test ci sono 5 quesiti con 4 risposte, di cui una sola giusta. Rispondendo a caso, qual è la probabilità di centrare più di metà

delle risposte?

Esercizio 11 In media 2 persone su 7 sanno il francese. In un campione di n persone, la probabilità che 3 sappiano il francese vale $\frac{160}{2401}$. Quanto vale n ?

Esercizio 12 Una fabbrica produce 2000 pezzi al giorno e in media ce ne sono 6 difettosi ogni 5 giorni. Qual è la probabilità che domani nessuno sia difettoso? E che almeno tre siano difettosi?

Esercizio 13 Alla cassa di un market si presentano in media 30 clienti all'ora. Qual è la probabilità che nei prossimi 10 minuti se ne presentino 7?

Esercizio 14 In media è albino un bambino su 35 000 nati. Qual è la probabilità che tra i primi 100 000 nati il prossimo anno in Italia ci siano 4 albinetti?

Esercizio 15 Un'urna contiene 4 biglie bianche e 7 nere.

- Calcola la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X data dal numero di biglie bianche uscite nell'estrazione di due biglie senza reimmissione.
- Calcola la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria Y data dal numero di biglie rosse e nere uscite nell'estrazione di due biglie con reimmissione.

Esercizio 16 Hai tre tentativi per indovinare una cifra tra 0 e 9 (dopo devi smettere). Qual è la probabilità che tu indovini? Quanti tentativi esegui in media?

Esercizio 17 Cerchi di colpire un bersaglio entro tre tentativi (dopo devi smettere). Al primo colpo hai probabilità 20% di colpire il bersaglio, e ogni volta che tiri di nuovo essa raddoppia. Qual è la probabilità che tu colpisca il bersaglio? Quanti tiri fai in media?

Esercizio 18 Calcola la distribuzione di probabilità della variabile aleatoria X data dal prodotto dei punteggi ottenuti nel lancio simultaneo di 3 dadi.