

Geometria 29/4/15

Coniche proiettive (in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$) non deg.:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

$\emptyset$

$$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$$

l'unica conica proiettiva
non deg. non vuota

Coniche affini $\mathcal{C}$ e completamento $\infty \mathcal{C}$:

$\mathcal{C}$

ellisse $x_1^2 + x_2^2 = 1$

$\overline{\mathcal{C}}$

$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$

iperbole $x_1^2 - x_2^2 = 1$

$x_1^2 - x_2^2 = x_3^2 \leadsto x_2^2 + x_3^2 = x_1^2$

$\Rightarrow y_1^2 + y_2^2 = y_3^2 \quad \begin{cases} y_1 = x_3 \\ y_2 = x_2 \\ y_3 = x_1 \end{cases}$

parabola $x_2 = x_1^2$

$x_2 x_3 = x_1^2$

$\begin{cases} x_2 = y_3 - y_1 \\ x_3 = y_3 + y_1 \\ x_1 = y_2 \end{cases}$

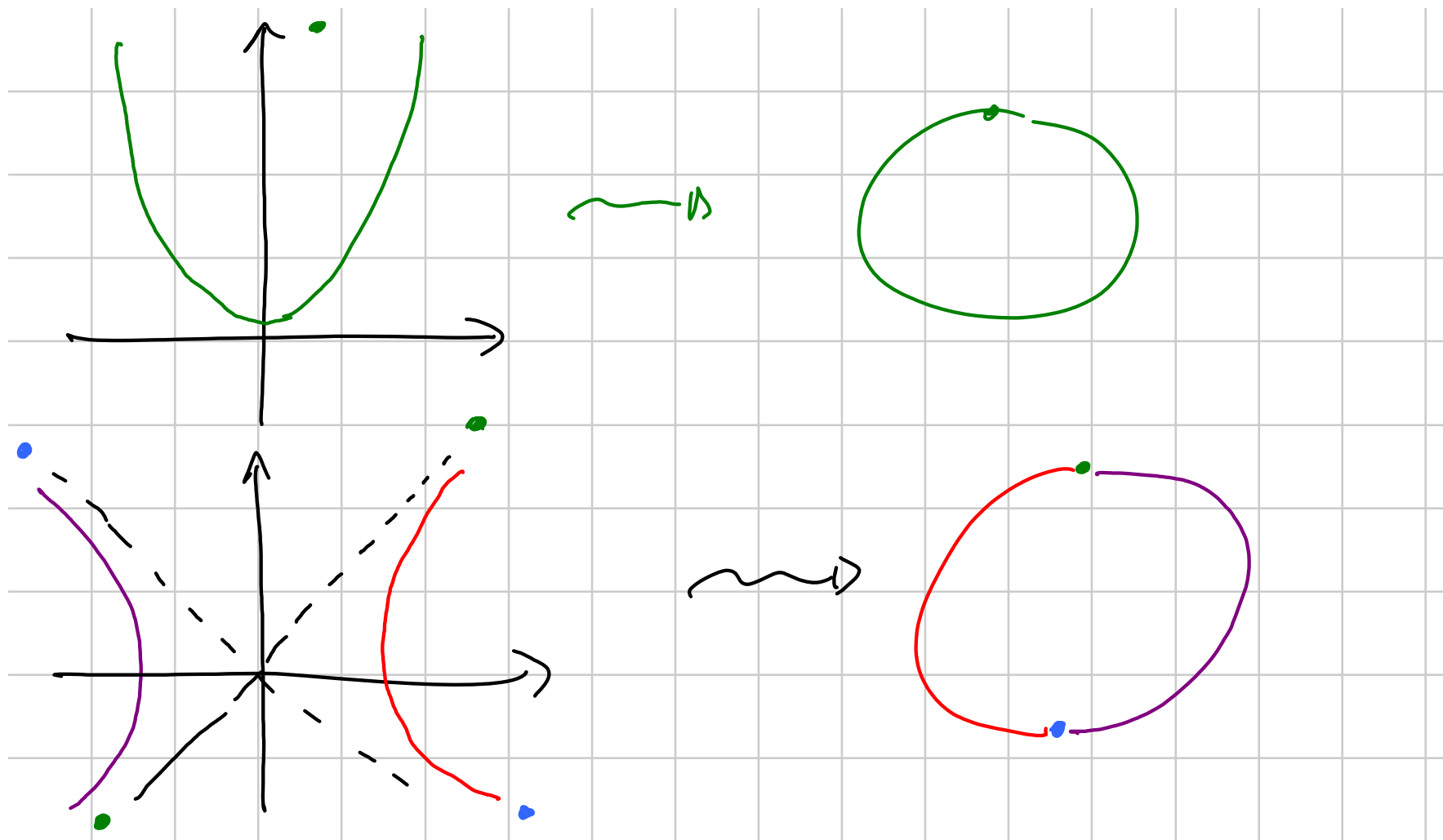
$\leadsto y_3^2 - y_1^2 = y_2^2$

$y_1^2 + y_2^2 = y_3^2$

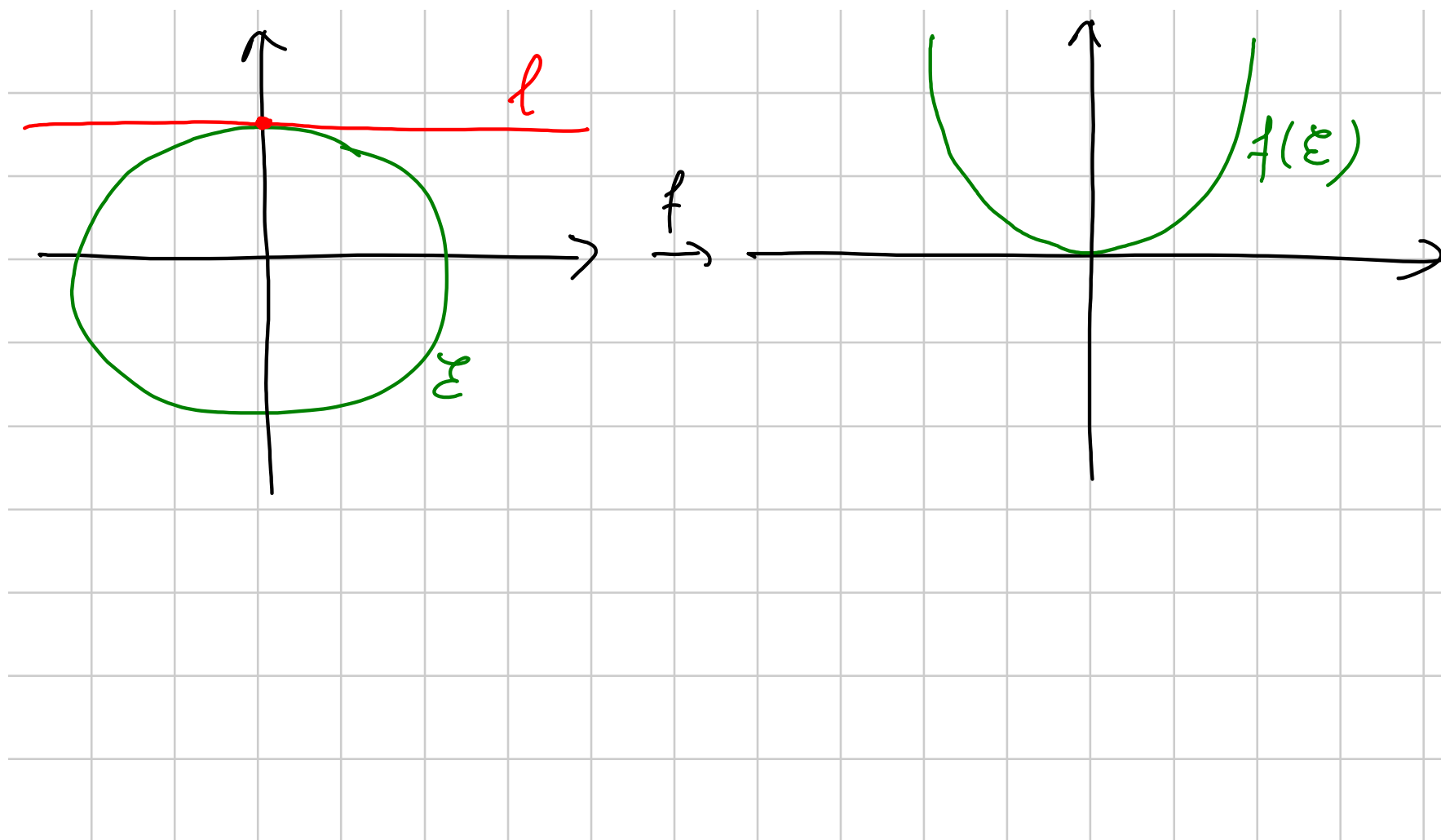
$\Rightarrow$ Le tre coniche affini non degeneri
hanno come completamento proiettivo
tutte la stessa conica proiettiva
(l'unica non $\emptyset$) -

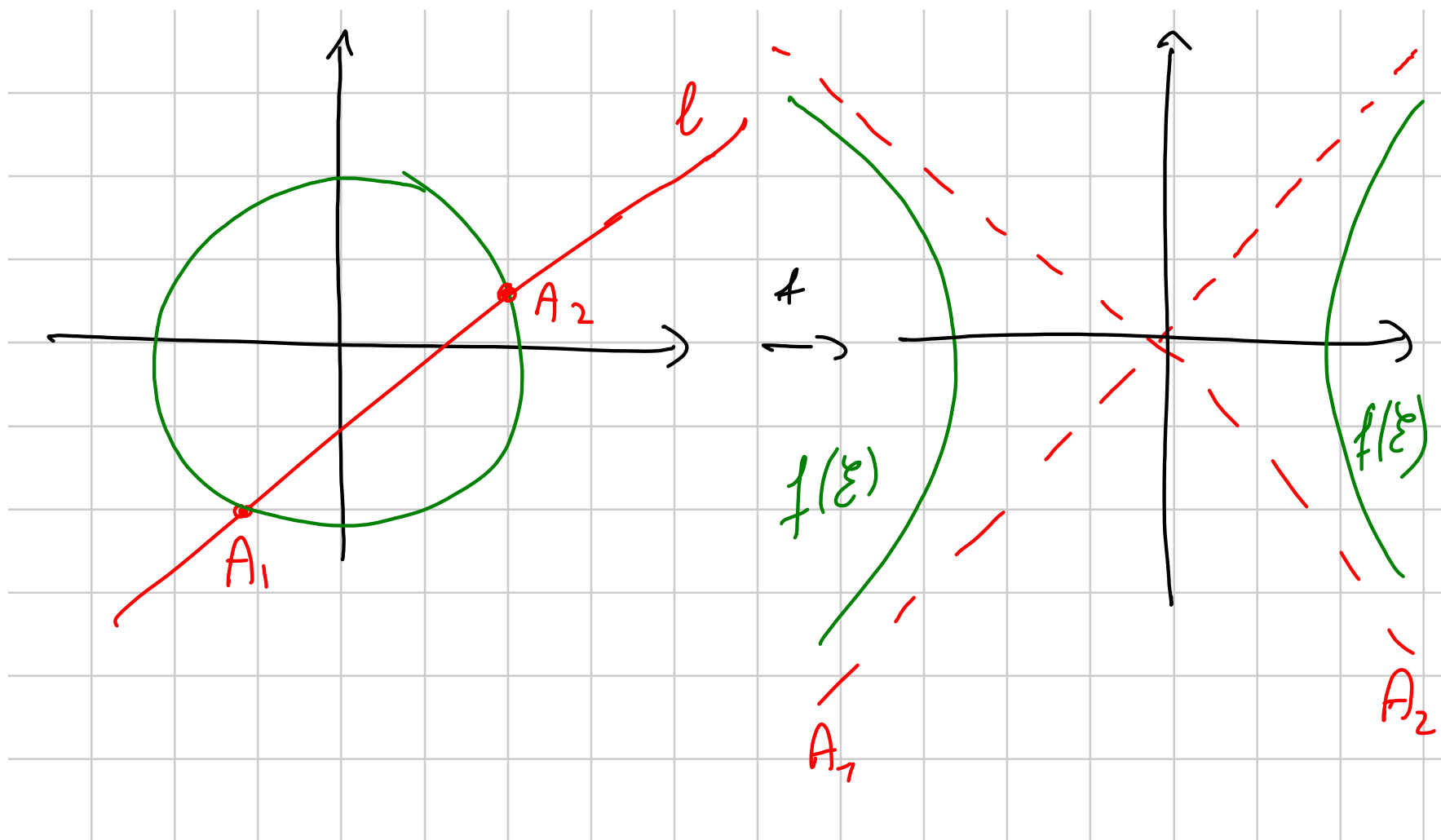
Interpretazioni:

- appiattendosi a parabola o iperbole i loro
pti all' ∞ si trova sempre un ellisse!



- spostando la retta e posso trasformare un'ellisse in una parabola o un'iperbole:
(Oss: se $l \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ è una retta esiste $f: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ transf. proiettiva t.c.
 $f(l) = \text{la retta all'infinito}$ -)





Quadriche proiettive non deg.

(luoghi def. da eqnz. di II grado
in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ con matrice assoc. con $\det \neq 0$):

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$

- $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$

- $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2$

ellissoide
proiettivo

iperboloide
proiettivo

} le uniche
due non $\emptyset$.

Quadriche affini non dep.

Programma: (1) Descrivere degli esempi
con le loro proprietà

(2) Provare che dati tali esempi sono i
modelli affini (cioè: per ogni quadrica
non dep. Q esiste una transf. affine f t.c.
 $f(Q)$ è uno degli esempi) —

(3) Spiegare come decidere quale "tipo affine"
di quadrica è definito da un'equazione.

(1) Modelli $(Q \subset \mathbb{R}^3; \overline{Q} \subset \mathbb{P}^3(\mathbb{R}); Q_\infty \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$

(1.1) $\emptyset : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 1 = 0$

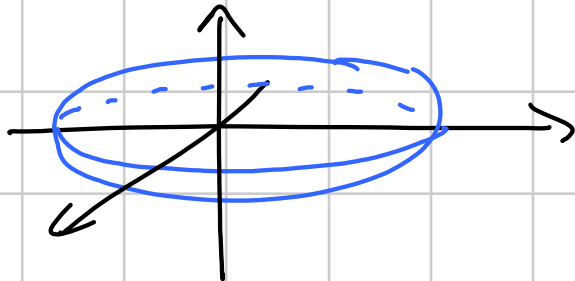
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{Q} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0$

$\emptyset \quad Q_\infty = \emptyset$

(1.2) Ellissoide : $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

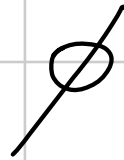
$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$



$$\overline{Q} : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$$

$$Q_\infty : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$$

ellissoide proiettivo

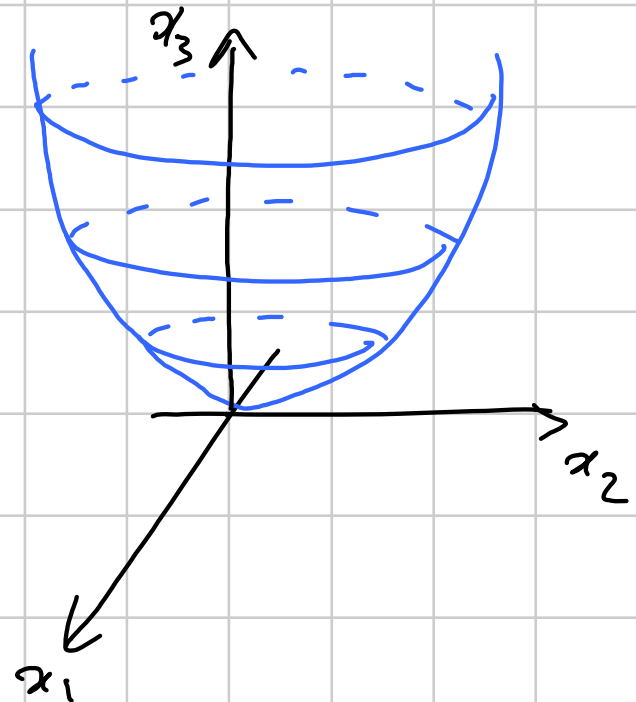


(1.3) Paraboloide **ellittico**

$$x_3 = x_1^2 + x_2^2$$

(superficie di rotazione)
intorno a asse x_3

(distanza d. l. x)²
dall'asse x_3



$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

oppure $y_1^2 + y_2^2 + 2y_3 = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\overline{Q} : x_3 x_4 = x_1^2 + x_2^2$$

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = y_2 \\ x_3 = y_4 - y_3 \\ x_4 = y_4 + y_3 \end{cases}$$

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = y_4^2$$

ellissoide iperbolico

$$Q_\infty : x_1^2 + x_2^2 = 0 \Rightarrow [0 : 0 : 1]$$

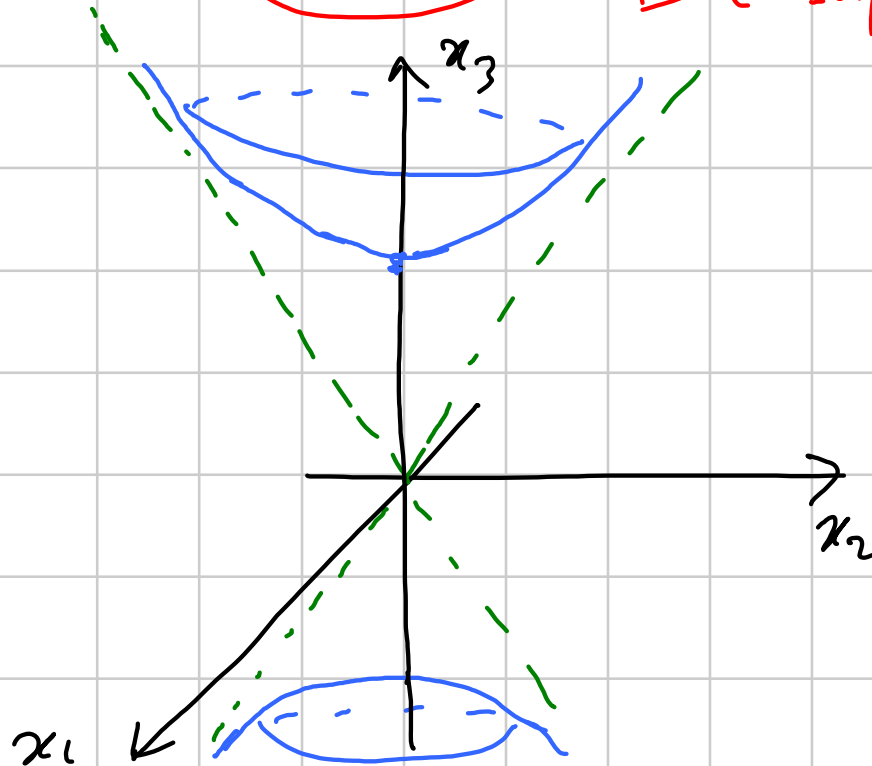
un solo punto :



(1.4) Iparboloide ellittico (a due folde):

$$x_3^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2$$

è sup. di rotazione
intorno all'asse x_3



ottenuta
ruotando un'
iperbole intorno
alle rette che
contengono i fuochi

$$\overline{Q} : x_3^2 = x_4^2 + x_1^2 + x_2^2 \quad \text{ellissoide proiettivo}$$

Oss: $\overline{Q}$ è fatto da due pezzi distinti

$$Q_{\infty} : x_3^2 = x_1^2 + x_2^2 \quad \text{l'unica conica proiettiva non degenere}$$

Interpretazione geometrica del fatto che
 $\overline{Q} = \text{ellissoide proiettivo}$

comme par l'ellipsoïde

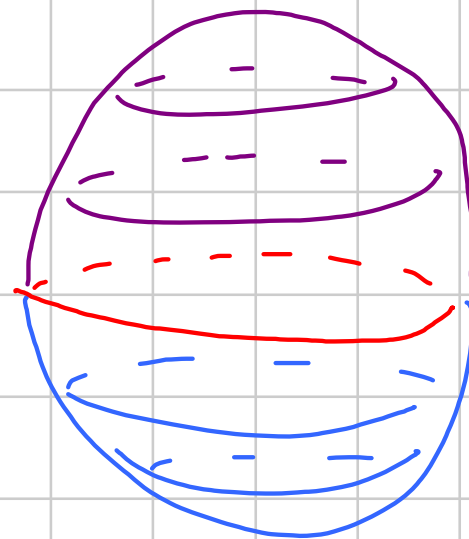
B

A



A

B



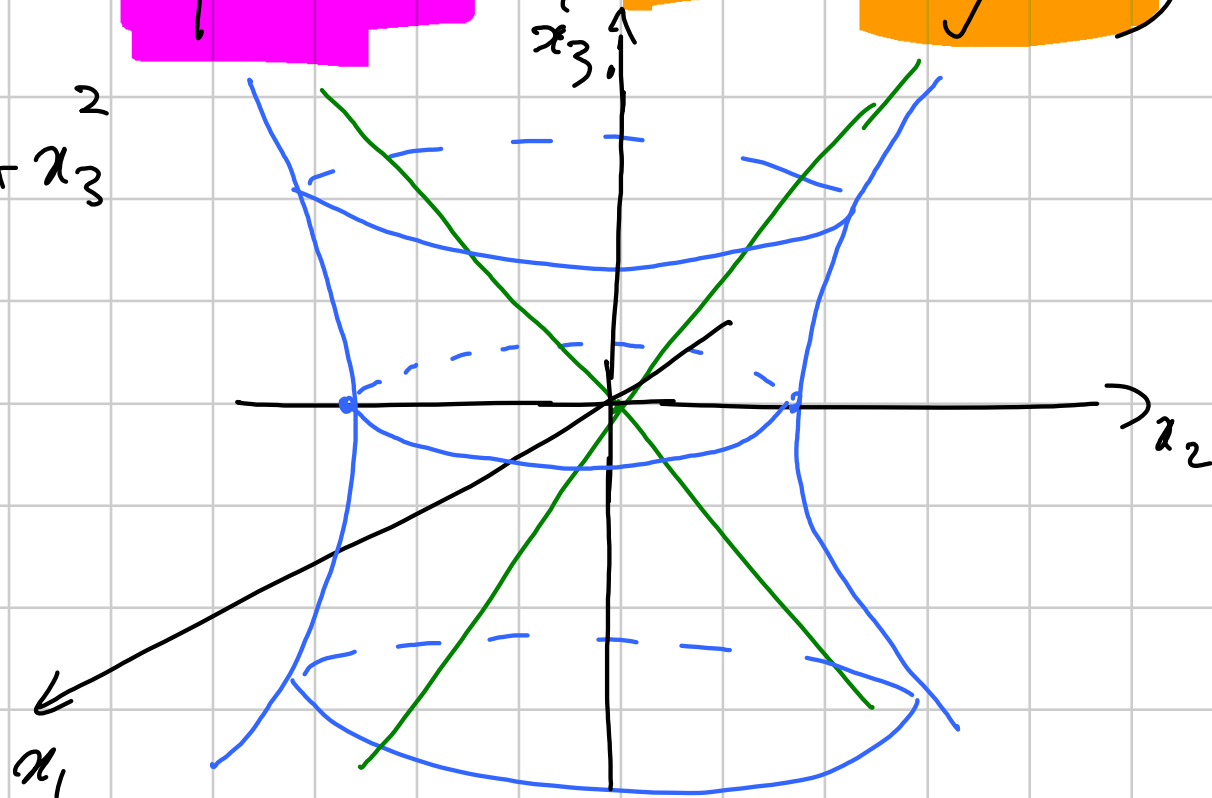
(1.5) Iperboloide

ipربولico

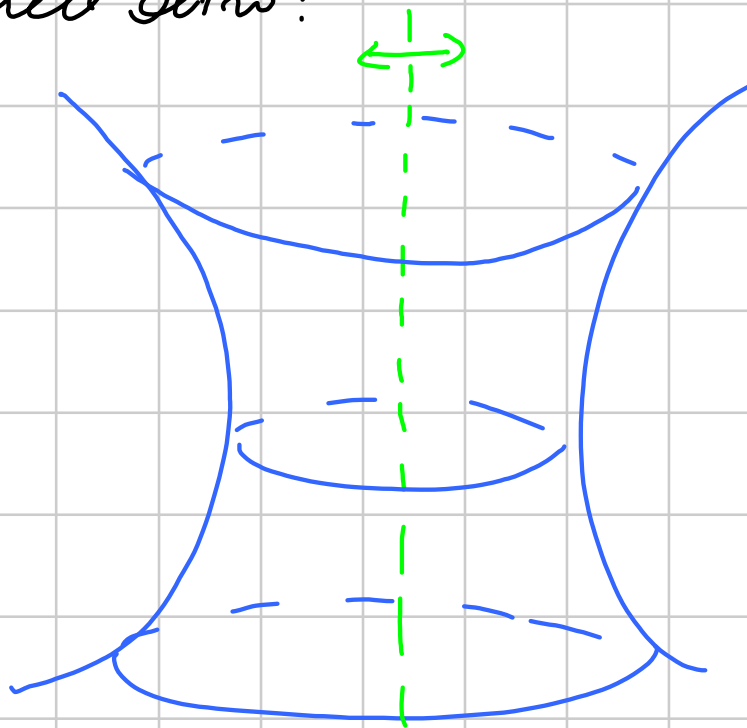
(a una foglia)

$$x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_3^2$$

↓
superf. di
rotaz. intorno
a x_3



Superficie ottenuta da un'iperbole ruotando le intorno
all'asse di simmetria che manda un ramo
nell'altro:



un pezzo solo

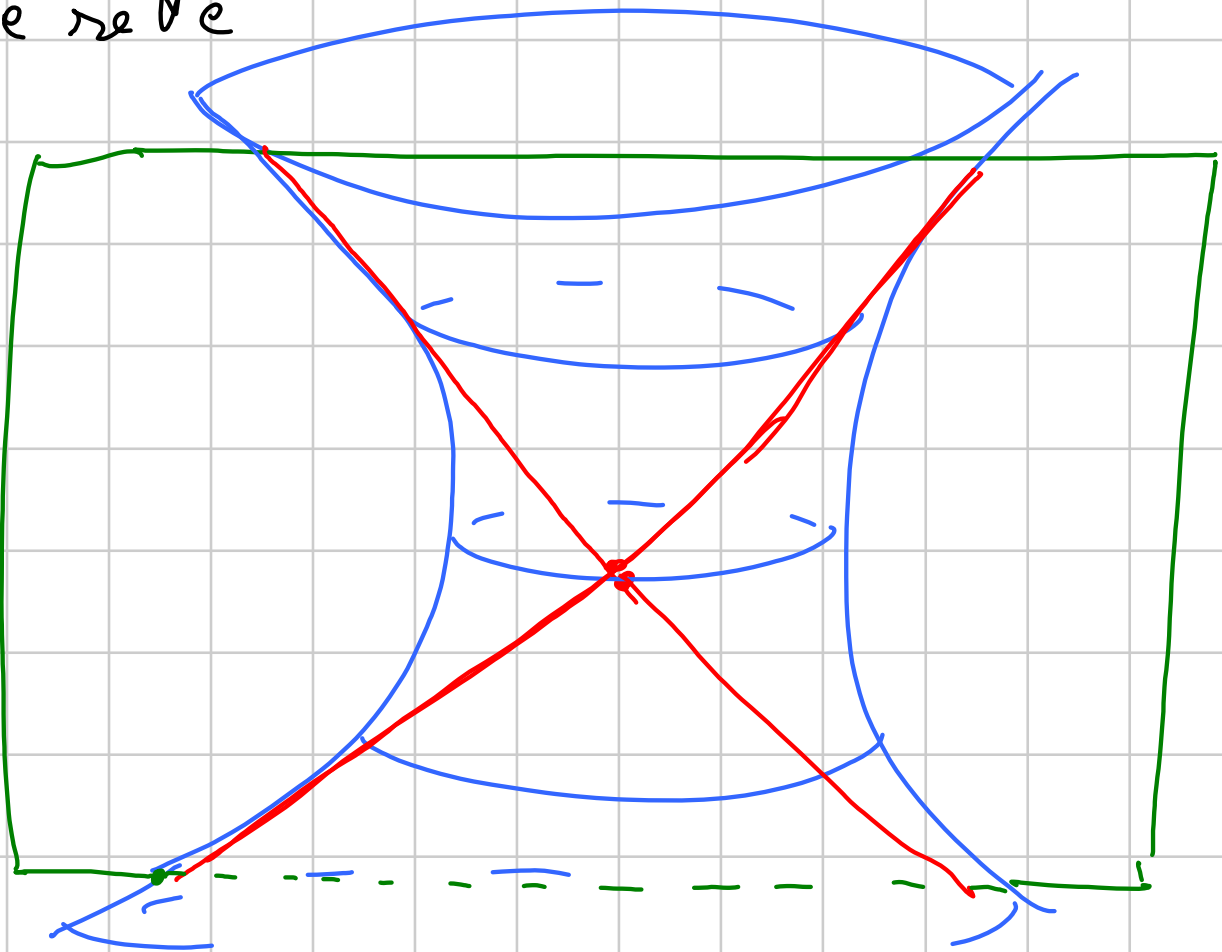
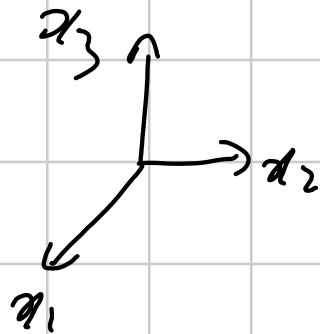
$$\overline{Q} : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 \quad \text{iperboloide
proiettivo}$$

$$Q_\infty : x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 \quad \text{l'unica conica proiett.
non deg. non } \emptyset.$$

$$Q : x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_3^2$$

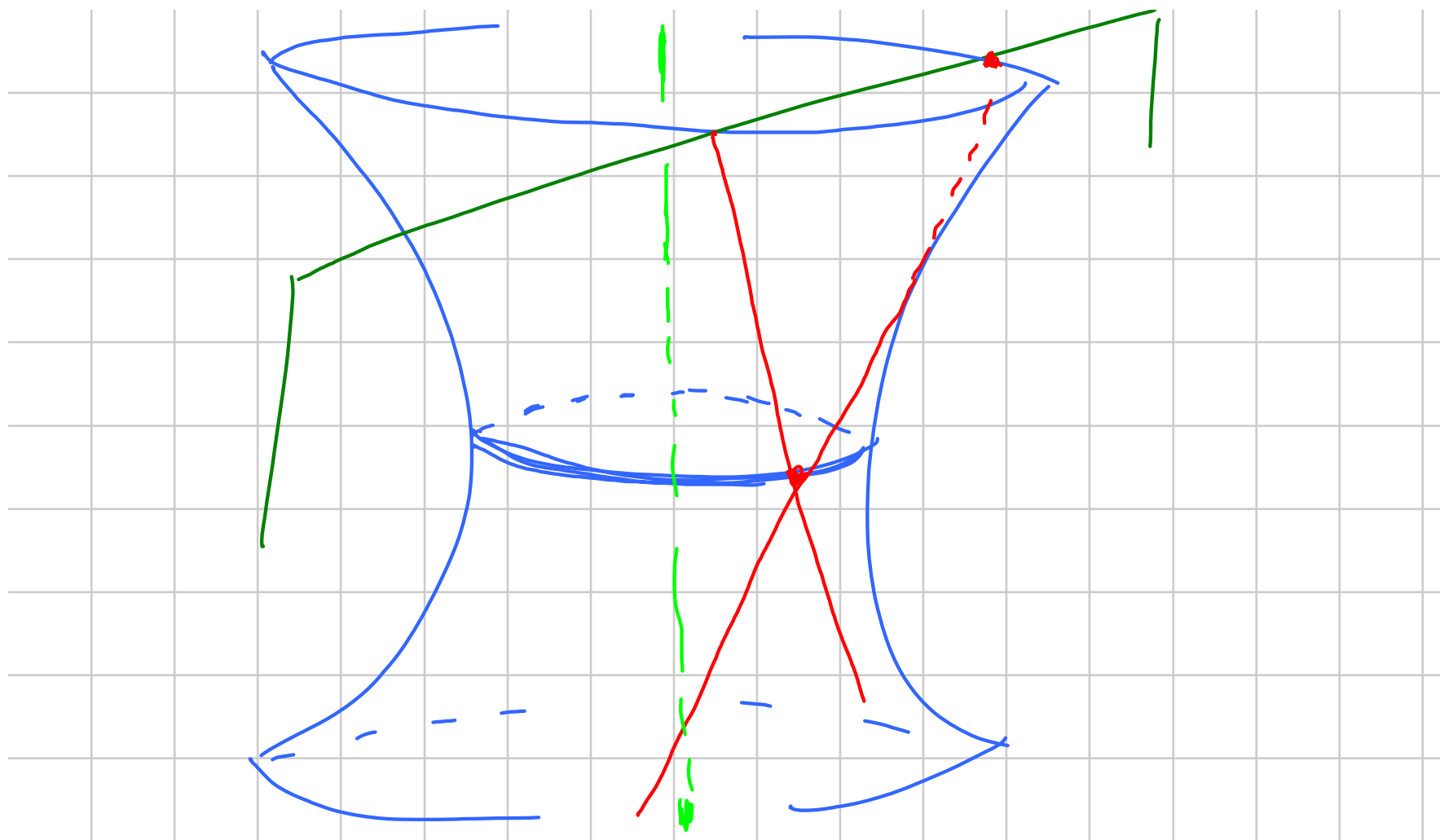
$$Q \cap \{x_1 = 1\} : 1 + x_2^2 = 1 + x_3^2 \\ \Rightarrow x_2^2 = x_3^2 \Rightarrow x_2 = \pm x_3$$

$\Rightarrow$ due rette



Ricordo: è una superficie di rotazione;

$\Rightarrow$ interscambio con qualsiasi piano verticale
tangente alla circonferenza $x_1^2 + x_2^2 = 1, x_3 = 0$
trovo due rette:



$\Rightarrow$ l'iperboloide iperbolico $\bar{\pi}$ ottenuto ruotando una puledra delle rette appena descritte intorno all'asse —



La superficie ottenuta ruotando una retta intorno a un'altra (sphenbe) $\bar{\pi}$ un iperboloide —

Matrici:

(1.4) Ipub. ell. $x_3^2 = 1 + x_1^2 + x_2^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

(1.5) Ipub. ipub. $x_1^2 + x_2^2 = 1 + x_3^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

(1.6) Paraboloida iperbolico - $x_3 = x_1^2 - x_2^2$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & -1/2 \\ & & -1/2 & 0 \end{pmatrix} \text{ oppure } \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\overline{Q} : x_3 x_4 = x_1^2 - x_2^2 \quad y_3^2 - y_4^2 = y_1^2 - y_2^2$$

$$z_1^2 + z_2^2 = z_3^2 + z_4^2$$

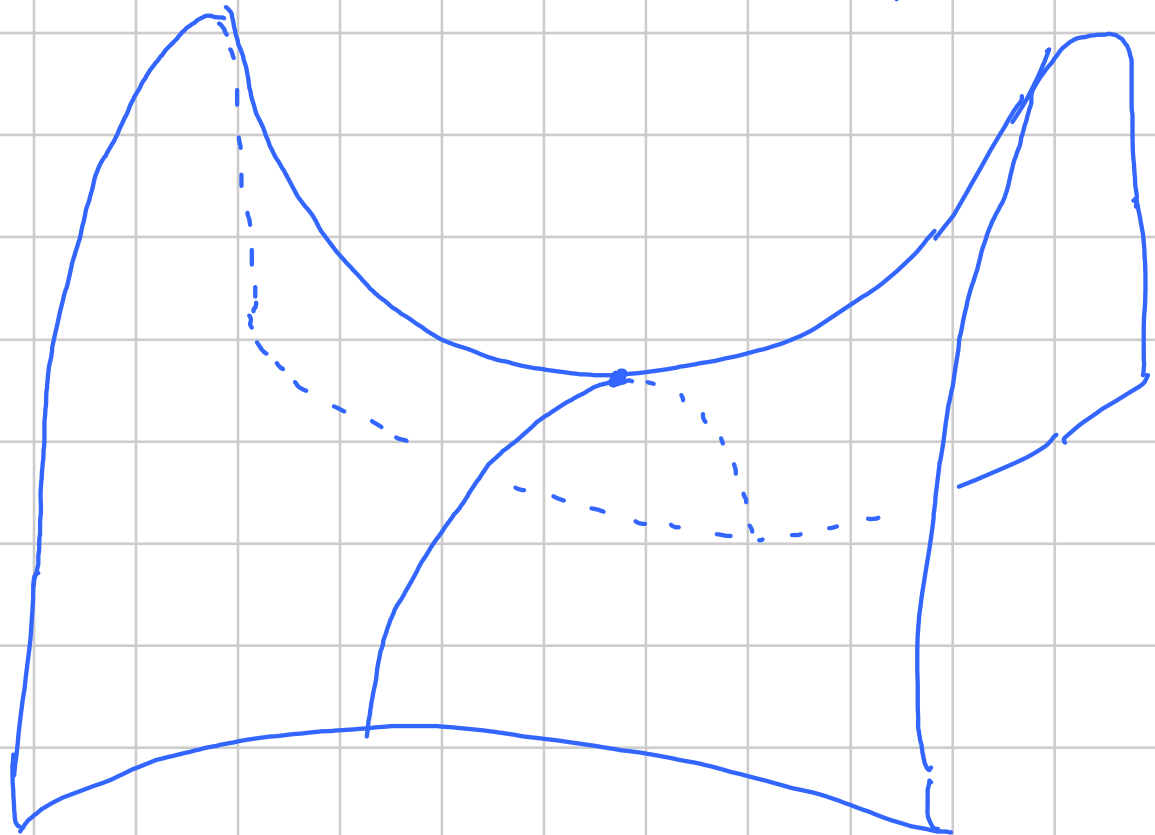
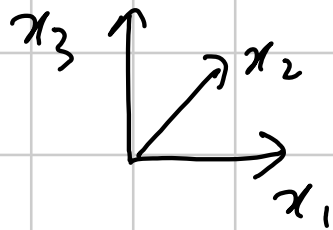
iperboloide proiettivo

$$Q_{\infty} : x_1^2 = x_2^2 \quad \left\{ \begin{array}{l} [1:1:t] : t \in \mathbb{R} \\ [1:-1:t] : t \in \mathbb{R} \end{array} \right\} \\ \cup \{ [0:0:1] \}$$

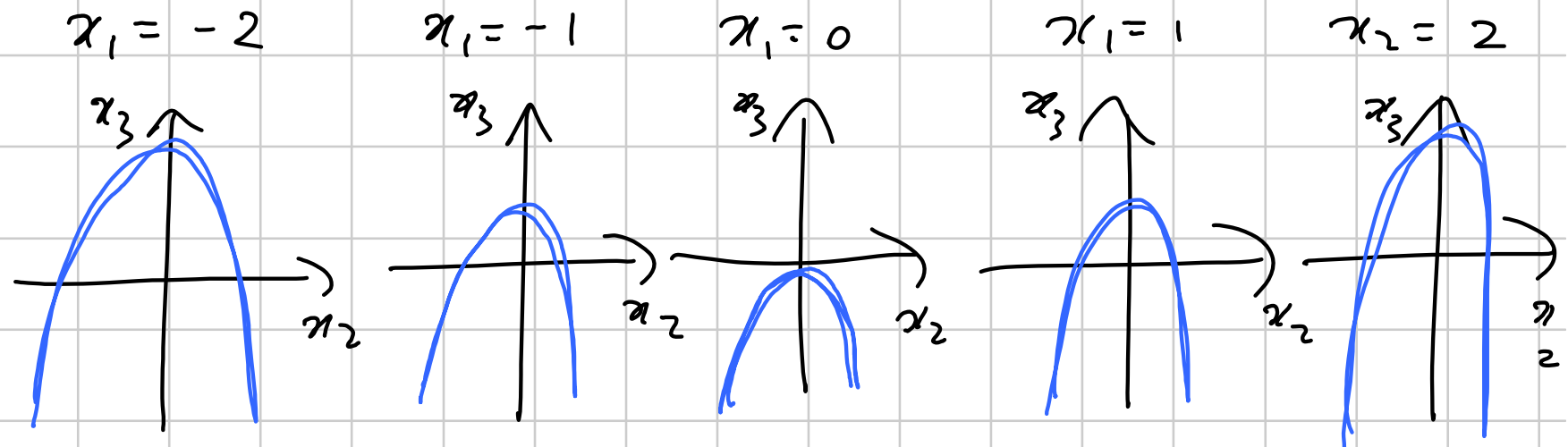
$\Rightarrow$ due rette proiettive $\perp$ $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
che si intersecano in un solo punto

Q : $x_3 = x_1^2 - x_2^2$

(paraboloid
a sella)



Filari della superficie:

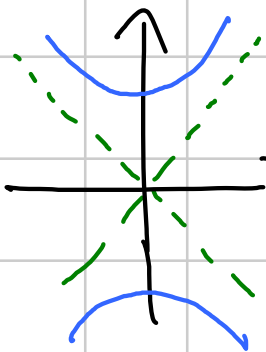


la parabola è sopra la linea (traslato):
il vertice per come la parabola $x_3 = x_1^2$

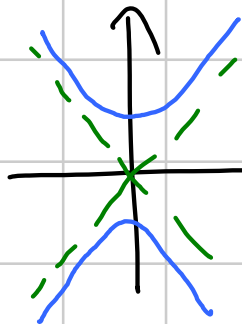
(Analogo film lungo x_2 : parabole verso l'alto
con vertice che percorre parabola verso il basso)

Film lungo x_3 : $x_3 = x_1^2 - x_2^2$

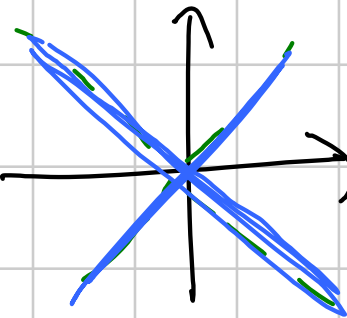
$x_3 = -2$



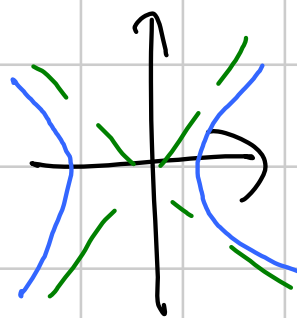
$x_3 = -1$



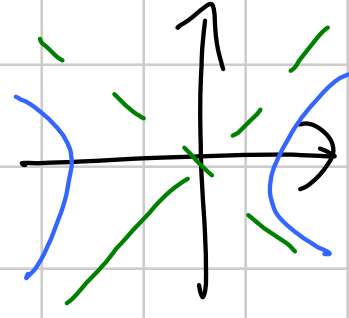
$x_3 = 0$

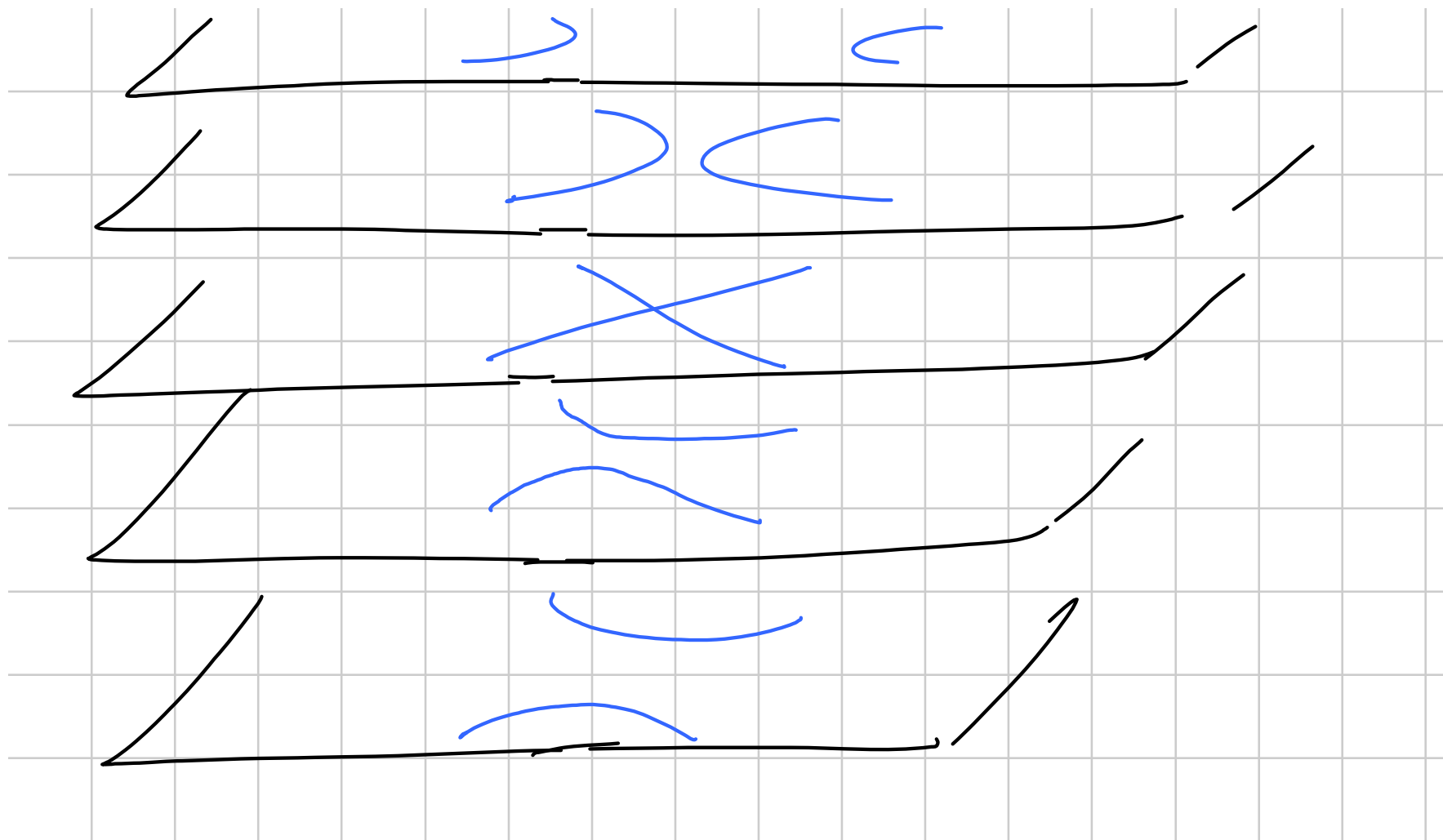


$x_3 = 1$



$x_3 = 2$

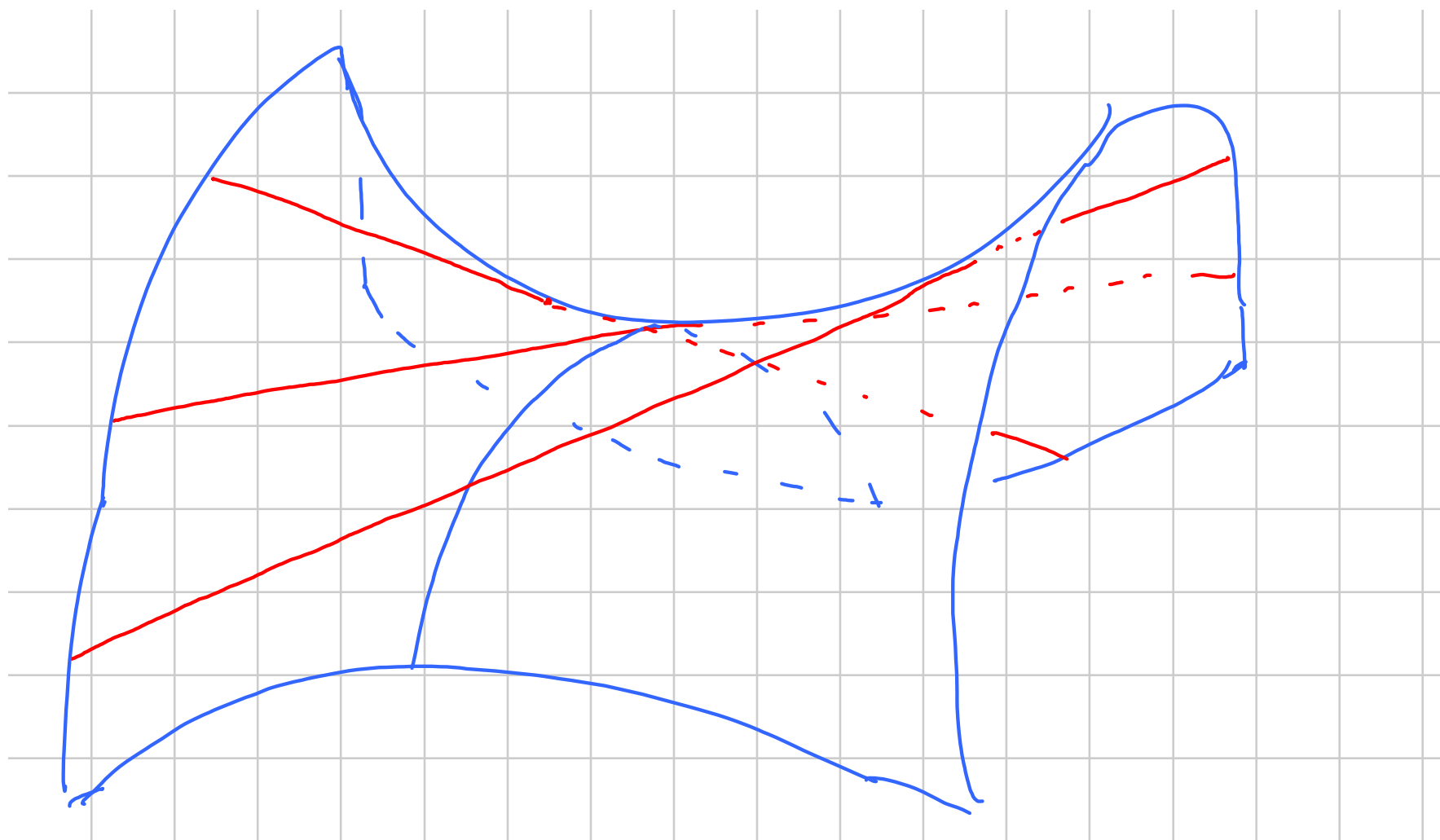




Identity : $x_3 = x_1^2 - x_2^2$

$$x_3 = (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q} \cap \{x_1 \pm x_2 = c\} = \{x_3 = c \cdot (x_1 \mp x_2)\}$$



$\Rightarrow$ per tutti i punti del paraboloid
iperbolico passano due rette in esso
contenute —

Es: giustificare il fatto che $\overline{Q}$ è lo stesso
per l'iperboloide iperbolico e per il
paraboloid iperbolico —