

Geometria 14/5/15

Curvatura per $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^2$

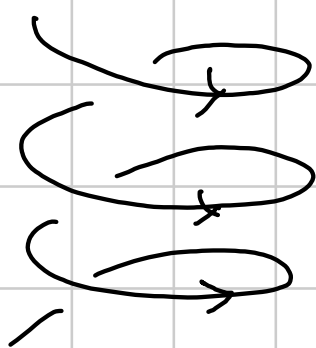
$$K = \pm \frac{1}{\text{raggio delle}} \\ \text{circonf con} \\ \text{triplice contatto}$$

+ curva a SX
- curva a DX

Per α in p.d'a. $K = \pm \|\alpha''(t)\|$

In generale: $K = \frac{\det(\alpha' \ \alpha'')}{\|\alpha'\|^3}$

Per $\alpha: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^3$; due misure di
 "non drittezza":



= curvatura

= "non planarità"
 = TORSIONE

CURVATURA :

- esiste una unica circonferenza (osculatrice) con triplice contatto; pongo $K = 1/\text{raro raggio}$

Per α in p.d'a. : $K = \|\alpha''(t)\|$ (sempre ≥ 0)

In generale
$$K = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}$$

(Nel caso di α piano estende formula precedente) -

TORSIONE = "misura di non planarità" -

Il piano su cui giace la circonf. osculatrice
(piano osculatore) = l'unico piano con
triplice contatto -

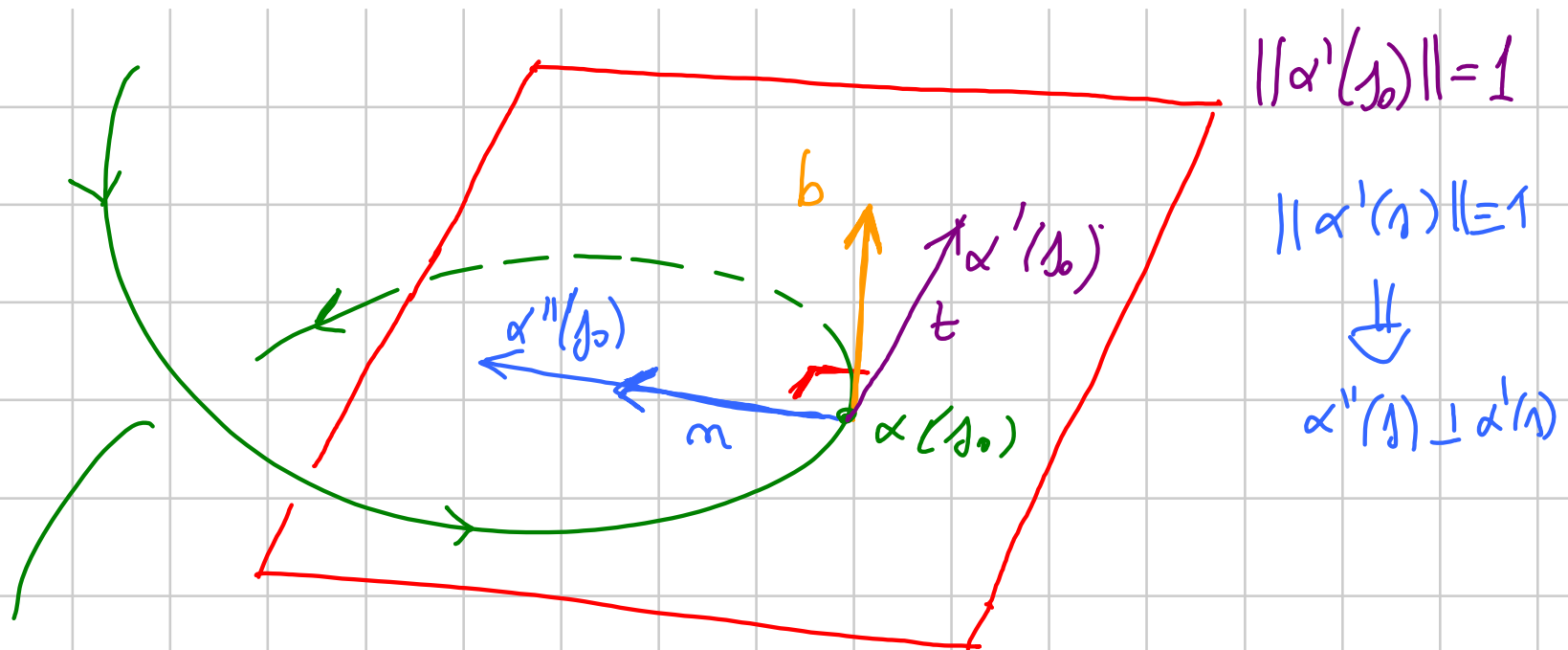
Torsione : misura della variazione del
piano osculatore -

Fatto: il piano osculatore in $\alpha(t_0)$ è

$$\alpha(t_0) + \text{Span}(\alpha'(t_0), \alpha''(t_0)) -$$

(Quindi : se $\alpha''(t_0)$ è multiplo di $\alpha'(t_0)$
non è definito -)

Introduciamo per α in p. d'a.
($\|\alpha'\| \equiv 1$) introduciamo un sistema
di riferimento (di Frenet) mobile
lungo la curva :
(uso $\alpha = \alpha(1)$)



$$t(s) = \alpha'(s) \quad \text{rette tangente}$$

$$m(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$

rette normale

$$b(s) = t(s) \wedge m(s)$$

rette binormale

Vogliamo: misure di non-planarità

= misure di quanto varia il piano $\text{Span}(t, m)$

= " " " " " " $b^\perp$

= " " " " " " rettone b_-

Teorema: esiste $\tau = \tau(t)$ (torsione) t.c.

$$b' = -\tau \cdot m_-$$

Quotne

$$(t \ m \ b)' = (t \ m \ b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\kappa & 0 \\ \kappa & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\begin{cases} t' = K \cdot m & \checkmark \\ m' = -K \cdot t + \tau \cdot b \\ b' = -\tau \cdot m & \checkmark \end{cases}$$

Dim: $\|b\| \equiv 1 \Rightarrow b' \perp b$ (Lemma di ieri).

$$t = \alpha' \Rightarrow t' = \alpha'' = \|\alpha''\| \cdot \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = K \cdot m$$

$$b = t \wedge m \Rightarrow b' = \underbrace{t' \wedge m + t \wedge m'}_{\substack{\sim \\ K \cdot m \\ 0}}$$

$$\Rightarrow b' \perp t$$

$$\Rightarrow b' \in \text{Span}(m); \text{ pongo } b' = -I \cdot m$$

(t, m, b) terua ortonomali positive

$$\Rightarrow m = b \wedge t$$

$$\Rightarrow m' = b' \wedge t + b \wedge t'$$

$$= -I \cdot m \wedge t + b \wedge K \cdot m$$

$$= I \cdot \underbrace{t \wedge m}_b + K \cdot \underbrace{(b \wedge m)}_{-t}$$

$$= -K \cdot t + \tau \cdot b$$



Di fatto : impossibile riparametrizzare
esplicitamente in $p.d'a$.

Per α non in $p.d'a$:

tensione :
$$T = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'' | \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}$$

referimento di Frénet :

- $(t, m) = \text{ortonormalizzazione}(\alpha', \alpha'')$
 $b = t \wedge m$

- $t = \frac{\alpha'}{\|\alpha'\|}$ $b = \frac{\alpha' \wedge \alpha''}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}$

$$m = b \wedge t$$

Oss: Supponiamo di avere $M: [a, b] \rightarrow M_{m \times n}(\mathbb{R})$
 t.c. $M(t)$ è ortogonale $\forall t \in [a, b]$.

Allora $M'(t) = M(t) \cdot A(t)$

con $A(t)$ antisimmetrica -

Da ciò dipende il fatto che la parte antisimmetrica del tensore degli sforzi dà movimento rigido -

$$\text{Perché } M' = M \cdot A \quad ? \quad \text{Poi } A = M^{-1} \cdot M' \\ = {}^t M \cdot M'$$

Devo vedere che ${}^t A + A = 0$:

$${}^t M \cdot M \equiv I_n \quad (M \text{ or } top)$$

$$\Rightarrow {}^t M' \cdot M + \underbrace{{}^t M \cdot M'}_A = 0$$

$$\underbrace{{}^t ({}^t M \cdot M')}_A$$

$\Rightarrow \underline{OK}.$

_____ 0 _____

1-forme e loro integrali su curve

$$\int_C f = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt$$

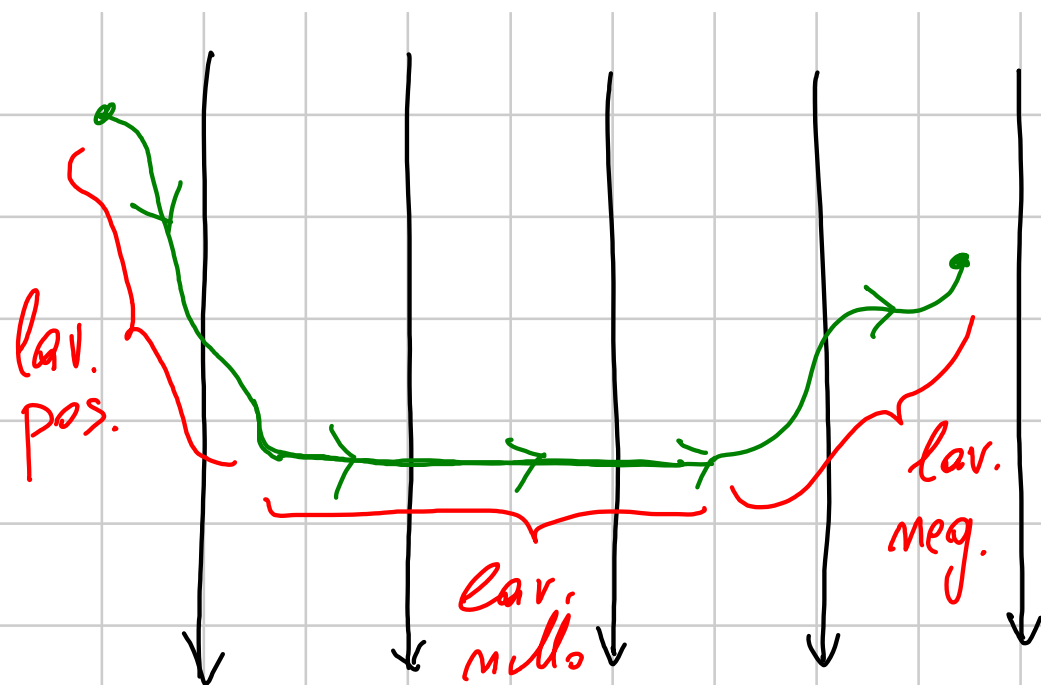
Diagram illustrating the components of the line integral formula:

- α : curve
- f : funz. scalare
- $f(\alpha(t))$: costo dell'elemento unitario di lunghezza
- $\|\alpha'(t)\| dt$: elem. di lunghezza

che dipende dal punto

Altra situazione: il costo dipende non solo dal punto ma anche dalla direzione di spostamento -

Esempio: lavoro fatto da un campo di forze su una particella in movimento:



Per esprimere il lavoro di un campo di forze
variabile per intensità, dir. e verso nel piano
lungo $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ avremo

$$\int_a^b \left(\underbrace{f(\alpha(t))}_{\substack{\text{intensità del} \\ \text{campo in direz. } x}} \cdot \underbrace{X'(t)}_{\substack{\text{spostamento} \\ \text{infinitesimo} \\ \text{in direz. } x}} dt + \underbrace{g(\alpha(t))}_{\substack{\text{intensità} \\ \text{in direz. } y}} \cdot \underbrace{Y'(t)}_{\substack{\text{spost.} \\ \text{inf. in} \\ \text{direz. } y}} dt \right)$$

Def: dato un insieme $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
chiamo **1-forma** su Ω un oggetto

$$\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$$

$$\omega(x,y) = f(x,y) \cdot dx + g(x,y) \cdot dy$$

dove $f, g: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_-$

Data $\alpha: [a,b] \rightarrow \Omega$ path

$$\int_{\alpha} \omega = \int_a^b (f(\alpha(t)) \cdot x'(t) + g(\alpha(t)) \cdot y'(t)) dt$$

Come ricordarlo: gruppo $\propto$ ho
 $(x, y) = \alpha(t)$ cioè $x = X(t)$
 $y = Y(t)$

$$\Rightarrow f(x, y) = f(\alpha(t))$$
$$g(x, y) = g(\alpha(t))$$

$$dx = X'(t) dt$$
$$dy = Y'(t) dt$$

ATTENZIONE :

$$\int_{\alpha} h$$

↑
funt.
scalar
(sent to dx, dy)

$$\int_a^b h(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt$$

$$\int_{\alpha} \omega$$

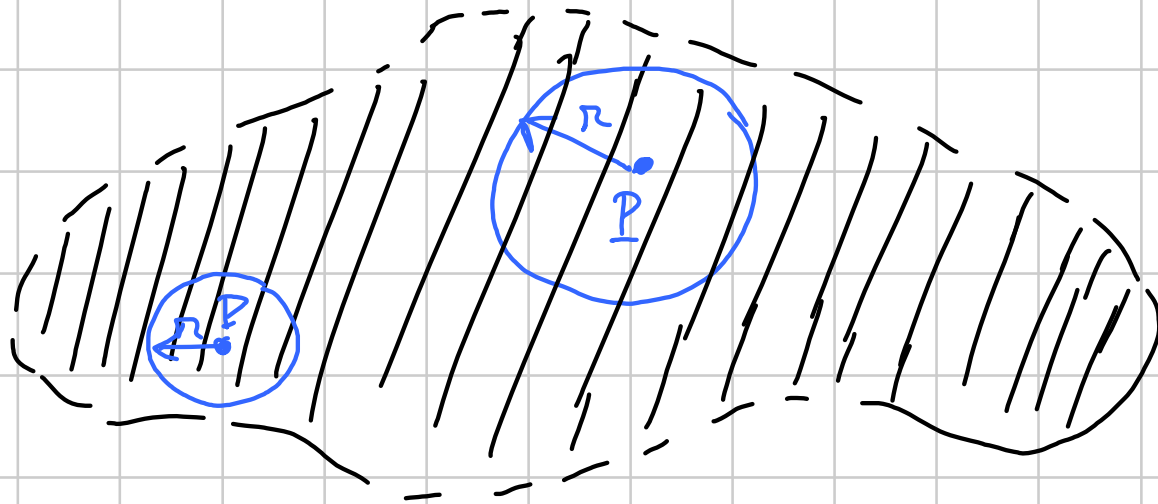
↑
1-form
 $\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$

$$\int_a^b (f \cdot X' + g \cdot Y') dt$$

Prendiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sempre aperto:

$$\forall P \in \Omega \quad \exists r > 0 \text{ t.c. } \{Q \in \mathbb{R}^2 : \|Q - P\| < r\}$$

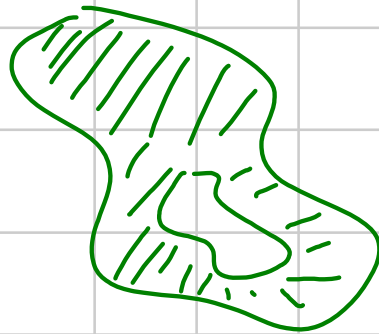
è contenute in Ω ; DISCO DI CENTRO
P E RAGGIO r



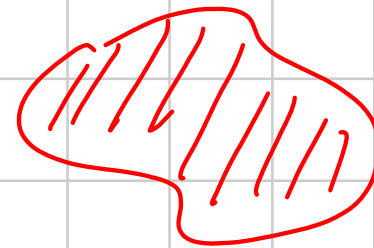
Def: diciamo Ω connesso se
"è fatto di un pezzo solo"



A_i



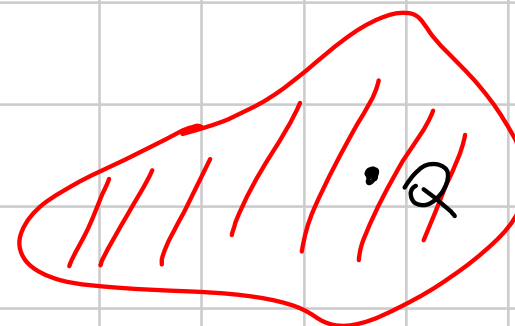
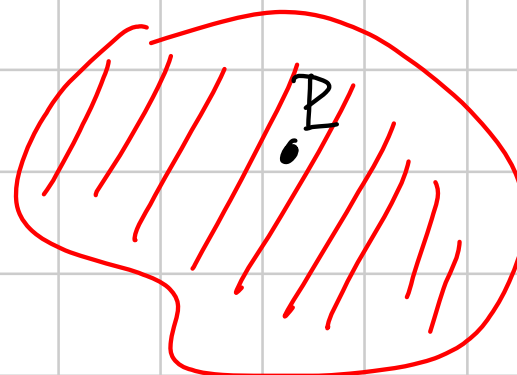
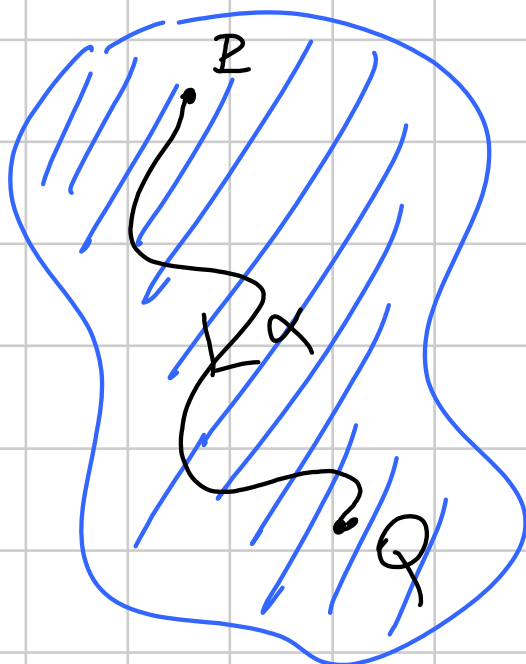
A_i



M_0



ovvero se $\forall P, Q \in \Omega$ esiste una curva
 $\alpha: [a, b] \rightarrow \Omega$ con $\alpha(a) = P$ $\alpha(b) = Q$



Prop: $\int_{\alpha} \omega$ non cambia se cambiamo parametrizzazione in modo orientato; cambia segno se cambiamo orientazione

$\Rightarrow \int_{\alpha} \omega$ è ben definito per curve α orientate e meno di dimensione 1

Dim: $\beta = \alpha \circ \sigma$ $\alpha: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 $\beta: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^2$
 $\sigma: [c, d] \rightarrow [a, b]$

$$\int_{\beta} \omega = \int_c^d \left(f(\alpha(\sigma(\lambda))) \cdot X'(\sigma(\lambda)) \cdot \sigma'(\lambda) + g(\alpha(\sigma(\lambda))) \cdot Y'(\sigma(\lambda)) \cdot \sigma'(\lambda) \right) d\lambda$$

$$= \int_c^d \left(f(\underbrace{\alpha(\sigma(\lambda))}_t) \cdot \underbrace{X'(\sigma(\lambda))}_t + g(\underbrace{\sigma(\lambda)}_t) \cdot \underbrace{Y'(\sigma(\lambda))}_t \right) \cdot \underbrace{\sigma'(\lambda)}_t d\lambda$$

$\pm$ dt

secondo orientazione

$$= \pm \int_a^b \left(f(x(t)) x'(t) + g(x(t)) y'(t) \right) dt$$

$$= \pm \int_{\alpha} \omega_- \quad \square$$

Def: se $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ è funzione scalare
chiamo **differenziale** di U la 1-forma:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy -$$

Fatto:
$$\int_a^b dU = \int_a^b \left(\frac{\partial U(x(t), y(t))}{\partial x} \cdot x'(t) + \frac{\partial U(x(t), y(t))}{\partial y} \cdot y'(t) \right) dt$$

$$= \int_a^b \frac{d}{dt} (U(x(t), y(t))) dt = U(x(t)) \Big|_{t=a}^{t=b}$$

$$= U(x(b)) - U(x(a))$$

Def: chiamiamo ω **esatta** se esiste
 U t.c. $\omega = dU$. Tale U
è detto **potenziale** di ω .

Visto sopra: Per una forma esatta, l'integrale
lungo curve è la differenza di
potenziale tra gli estremi.

Fisica: ω = campo di forze

ω esatta $\iff$ campo conservativo _

Q: capire quali forme sono esatte _

Prop: sia ω una 1-forma su $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
aperto connesso _

Allego:

ω esatta $\iff \int_{\alpha} \omega = 0$ per ogni curva
 α chiusa
in Ω _

Qss: nessun aiuto pratico

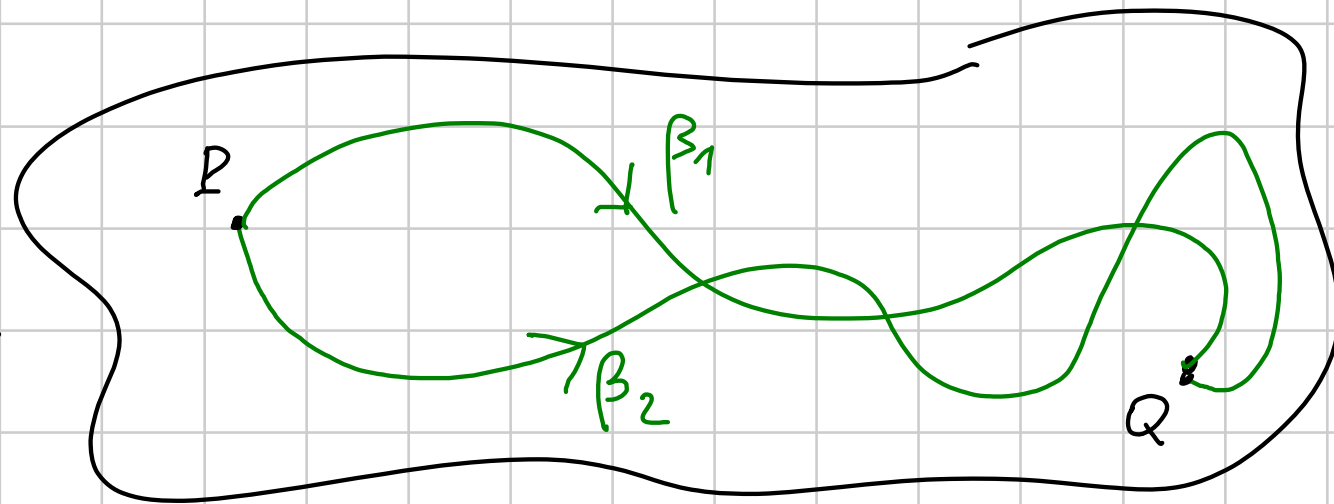
Dim: $\Rightarrow$

ω esatto $\Rightarrow \omega = dU$; se $\alpha : [a, b] \rightarrow \Omega$ dove

$$\int_{\alpha} \omega = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)) = 0$$



Affermo che $\int \omega$ dipende solo
dagli estremi di β e $\beta: [a, b] \rightarrow \Omega$.



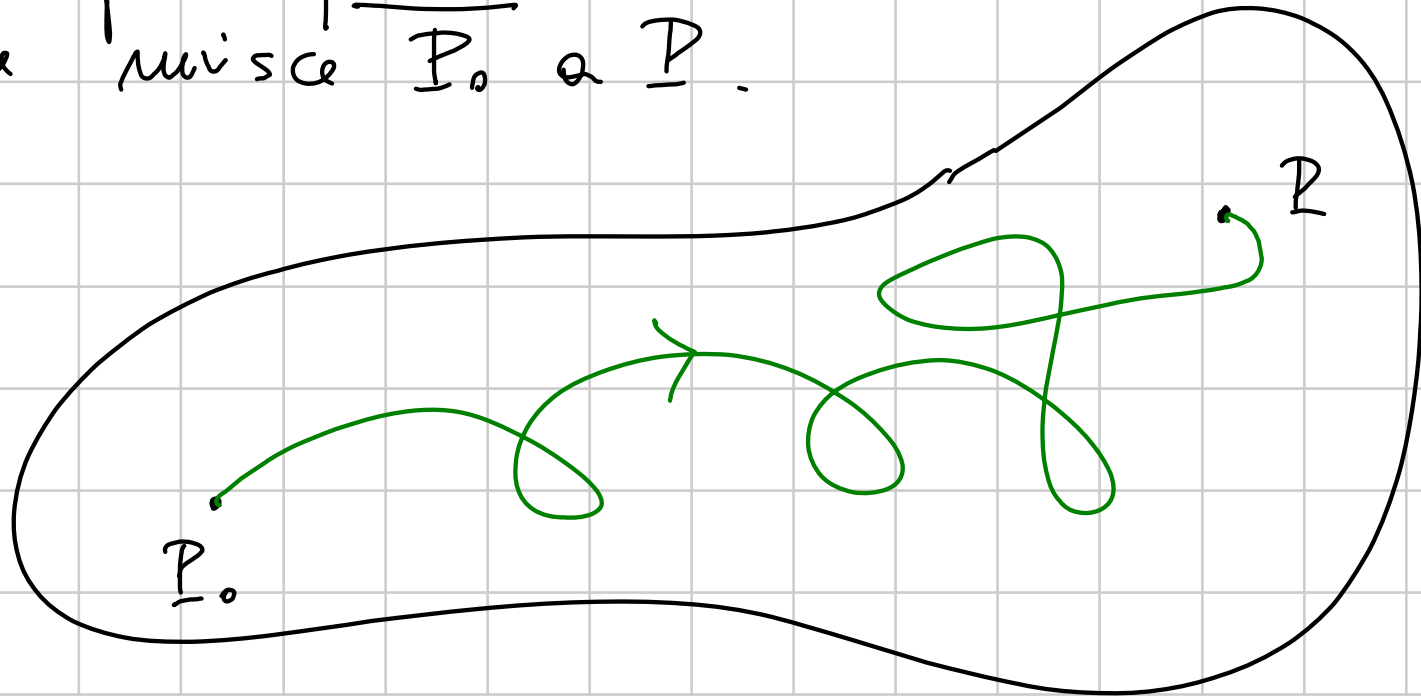
Se $\alpha = \beta_1 \cdot \beta_2^{-1}$

(primo β_1 e poi β_2 al contrario)
 $\Rightarrow \alpha$ chiusa $\Rightarrow \int_{\alpha} \omega = 0$

$$\Rightarrow 0 = \int_{\alpha} \omega = \int_{\beta_1} \omega - \int_{\beta_2} \omega \quad \underline{OK}$$

Quindi esibisco un potenziale per
 $\omega = f \cdot dx + g \cdot dy -$

Fisso $P_0 \in \Omega$ e pongo $U(P) = \int_{\beta} \omega$
dove β è qualsiasi curva
che unisce P_0 a P .



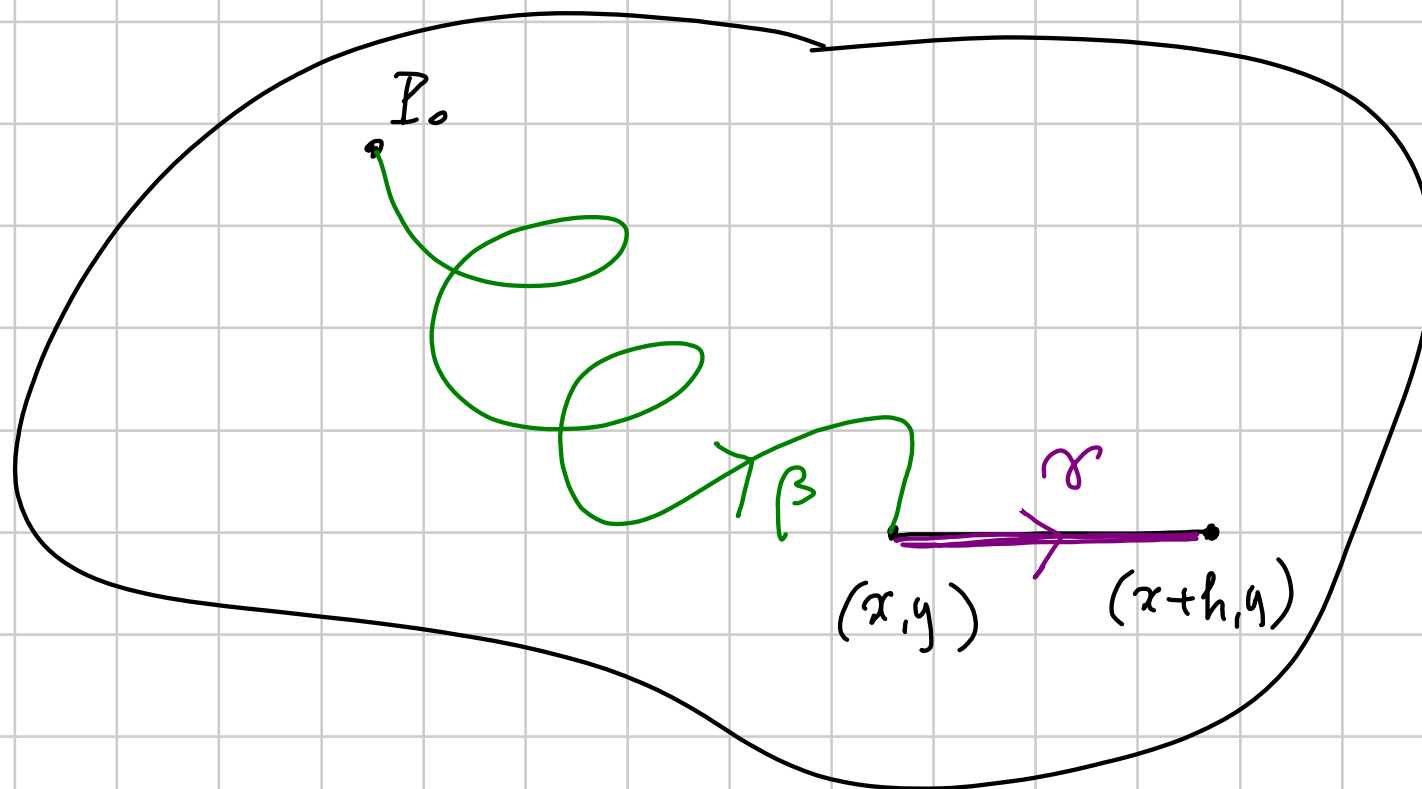
Per quanto sopra il risultato non dipende da β .

Devo vedere che $\frac{\partial U}{\partial x} = f$ e $\frac{\partial U}{\partial y} = g$

(Tesi: $\omega = dU$)

$$\begin{array}{c} \parallel \\ f dx + g dy \end{array} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x, y) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{U(x+h, y) - U(x, y)}{h}$$



$$U(x, y) = \int_{\beta} \omega$$

$$U(x+h, y) = \int_{\beta \cdot \gamma} \omega$$

$$\Rightarrow \frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_{\gamma} \omega$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h \left(f(x+t, y) \cdot 1 + g(x+t, y) \cdot 0 \right) dt$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t, y) dt = f(x, y)$$

Analysierete $\frac{\partial U}{\partial y} = g(x, y) -$



Definisco ora il differenziale anche per una 1-forma:

$$\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$$

$$d\omega = \underbrace{df}_{\text{OK}} \cdot \underbrace{dx}_{\text{OK}} + \underbrace{f}_{\text{OK}} \cdot \underbrace{d(dx)}_{\text{OK}} + \underbrace{dg}_{\text{OK}} \cdot \underbrace{dy}_{\text{OK}} + \underbrace{g}_{\text{OK}} \cdot \underbrace{d(dy)}_{\text{OK}}$$

essendo una derivazione covariante
che vale Leibnitz

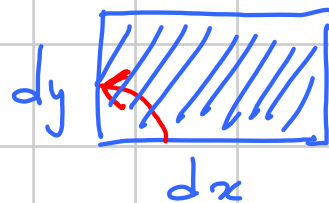
dx = elemento di lunghezza in $\text{lin}^1 x$
che non dipende dal punto

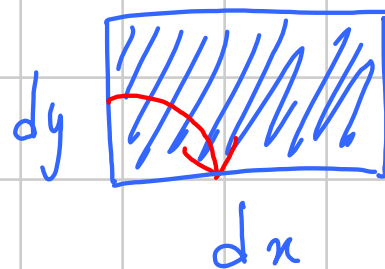
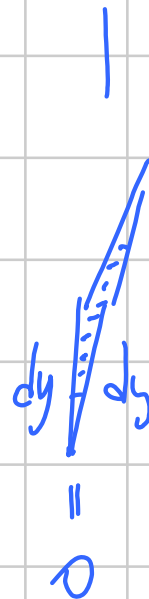
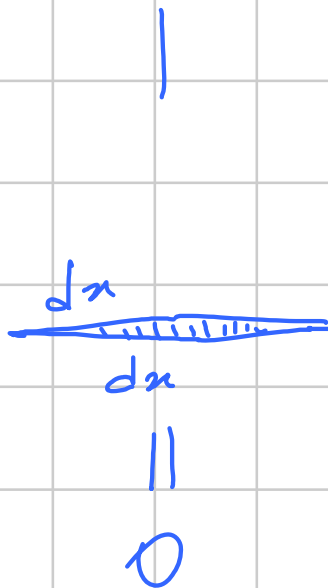
$$\Rightarrow ddx=0 \quad (\text{e} \quad ddy=0)$$

$$dw = df \cdot dx + dg \cdot dy$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \right) dx + \left(\frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy \right) dy$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} dx dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy dx + \frac{\partial g}{\partial x} dx dy + \frac{\partial g}{\partial y} dy dy$$





$$= -dx dy$$

$$\Rightarrow \text{se } \omega = f dx + g \cdot dy$$

Poupo

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dx dy -$$

Oss: se $\omega = dU$ (esatta) allora

$$f = \frac{\partial U}{\partial x} \quad g = \frac{\partial U}{\partial y}$$

$$\Rightarrow d\omega = \left(\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \right) dx dy$$

$$\Rightarrow dw = 0$$

Def: diciamo ω chiusa se $d\omega = 0$

Oss: verificare che chiusa è un calcolo diretto.

FATTO: ω esatta $\Rightarrow \omega$ chiusa

Dunque: per vedere se una forma è esatta
per prima cosa si verifica se è chiusa

- se non lo è : No
- se lo è : [DOMANI]

FATTO : Esistono forme che non sono -