# ETA 2/12/14

## Escissione singolare:

$Z \subset A \subset X$, $\overline{Z} \subset \mathring{A} \Rightarrow$

$(X \setminus Z, A \setminus Z) \hookrightarrow (X, A)$

induce isomorfismi in $H_*^{SING}$.

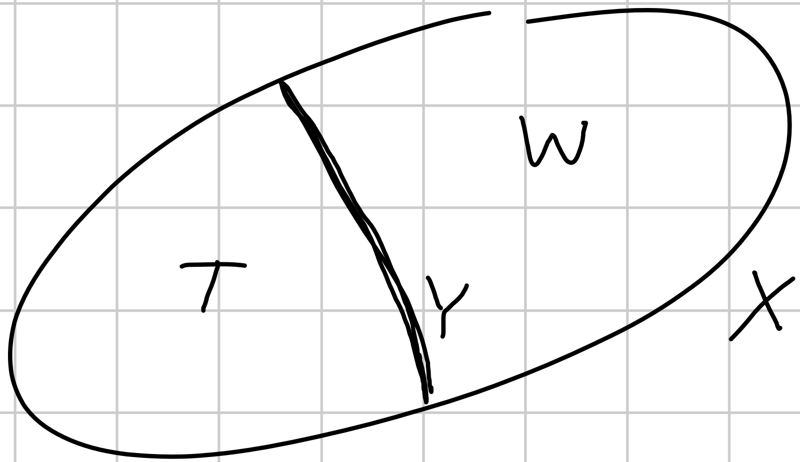
<u>Cor</u>: $H_*^{SING}$ ristretta alle coppie PL soddisfa l'escissione nelle ipotesi PL.

<u>Dim</u>: Sia $X = T \cup W$ sottocomplessi, $Y = T \cap W$.
Devo provare che:

$$H_*^{SING}(X, T) \cong H_*^{SING}(W, Y).$$

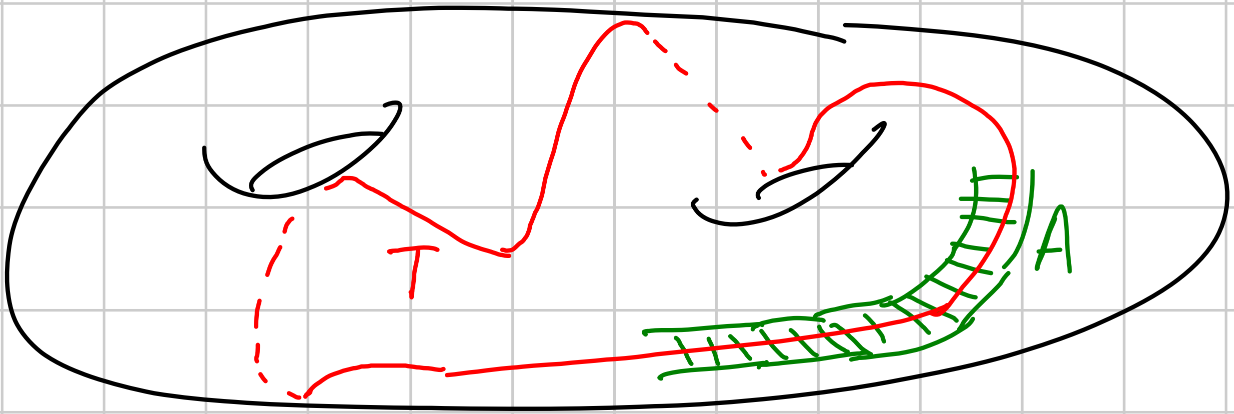
Cercando di usare l'escissione SING come enunciata dovrei usare $Z = T \setminus Y \subset A = T \subset X$

però è falso che $Z \subset \mathring{A}$.



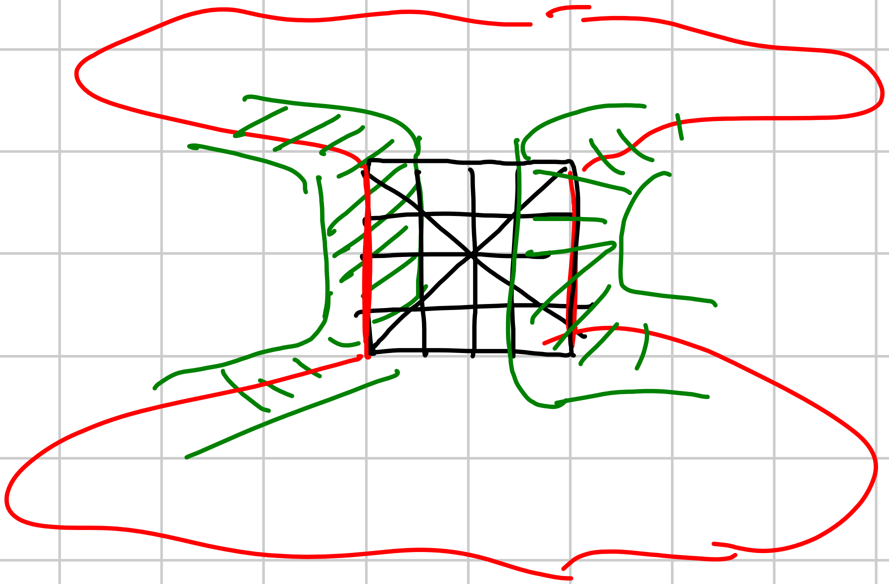

Rimedio: prendo $A$ = un intorno regolare di $T$ in $X$: unione di tutti i simplessi di $X$ che incontrano $T$

in una opportuna suddivisione di $X$ abbastanza fine.



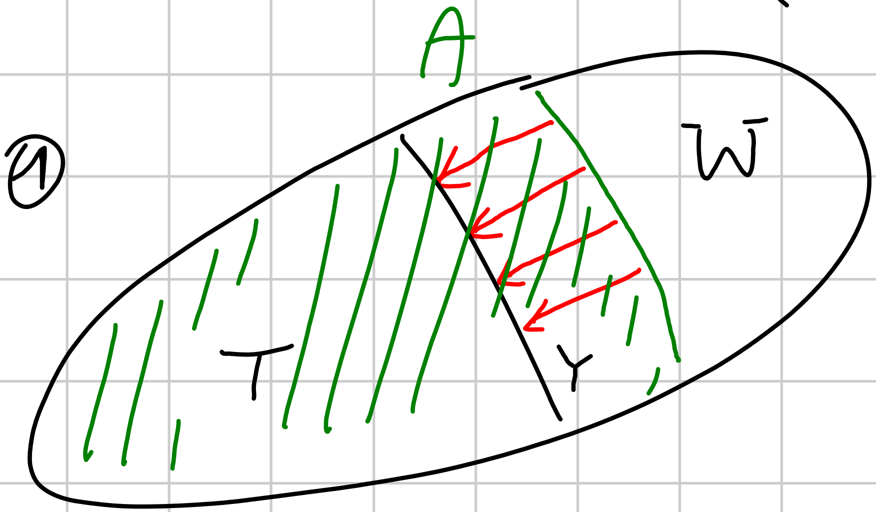

Perché suddividere:

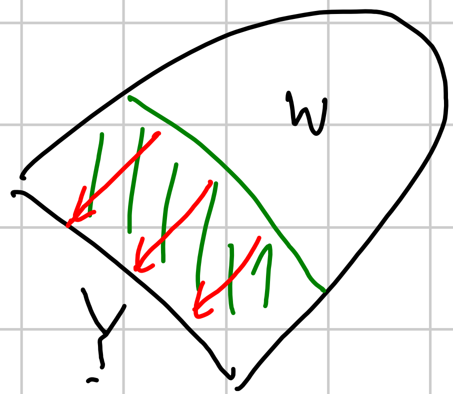
senza suddividere prendo tutto il prodotto : suddividendo



Punto: ① $(X, A) \simeq (X, T)$ è un retratto di deformazione e per restrizione $\left(X \setminus (T \setminus Y), A \setminus (T \setminus Y)\right)$ (2)

$\simeq (\bar{W}, Y)$

(1) 


Ora $\overline{T \setminus Y} = T \subset \mathrm{int}(A)$

$$H_*^{SING}(X, A) \underset{\text{SING}}{\overset{\text{omotopie}}{\cong}} H_*(X, T)$$

**N**: Tesi

esc$\text{is}$sione SING $\Vert\wr$

$$H_*^{SING}(X \setminus (T \setminus Y), A \setminus (T \setminus Y)) \underset{\text{omotopie SING}}{\cong} H_*(W, Y) \; - \; \boxed{//}$$

<u>Cor</u>: $H_*^{SING}$ ristretto alle coppie PL coincide con $H_*^{PL}$ —

(analogamente per $\Delta$-complessi e CW-complessi).

<u>Dim</u>: valgono tutti gli assiomi che caratterizzano $H_*^{PL}$ e abbiamo una trasf. naturale

$$H_*^{PL} \longrightarrow H_*^{SING}$$

data da: esprimere ogni simplesso geometrico come simplesso parametrizzato, i.e. $\Delta_n \to X$. $\blacksquare$

Per dimostrare l'escissione SING uso:

<u>Prop</u>: Sia $X$ sp. top. e $\mathcal{U} \subset \mathcal{P}(X)$ t.c. $\{\mathring{U} : U \in \mathcal{U}\}$ è ric. di $X$.

Posto $C_n^{\mathcal{U}}(X) = \{\sum m_i \sigma_i : \sigma_i : \Delta_n \to X \ \forall i \ \exists U \text{ t.c. } \mathrm{Im}(\sigma_i) \subset U\}$.

Allora

$$C_n^{\mathcal{U}}(X) \xhookrightarrow{i} C_n(X)$$

è una equivalenza omotopica di complessi di catene, cioè esiste $\rho : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$ t.c.

$i \circ \rho \simeq id_{C(X)}$ e $\rho \circ i \simeq id_{C^{\mathcal{U}}(X)}$

nel senso di omotopia tra complessi di catene.

(In realtà: $\rho \circ i = id_{C^{\mathcal{U}}(X)}$).

<u>Cor</u>: $H_*(C_*^{\mathcal{U}}(X)) \cong H_*(X)$.

Lem: $\sigma \subset \mathbb{R}^N$ $m$-simplesso

$$\Rightarrow \operatorname{maxdiam}(\sigma') \leq \frac{m}{m+1} \operatorname{diam}(\sigma)$$

suddivisione baricentrica

Cor: se $K$ è un complesso simpliciale

$$\operatorname{maxdiam}\left(K^{(m)}\right) \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

sudd. baricentrica iterata $m$ volte

Dimo (Lem): sappiamo che se $\sigma = \mathrm{Conv}(v_0, \dots, v_n)$

$$\sigma' = \left\{ \mathrm{Conv}(c(\tau_0), \dots, c(\tau_k)) \; : \; \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k \text{ facce di } \sigma \right\}$$

Devo provare che ognuno ha diam $\leq \frac{n}{n+1}$ diam $\sigma$.

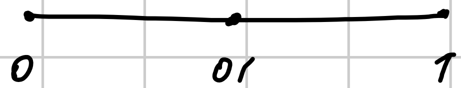
Due casi:

$\tau_k \neq \sigma$ (faccia propria di dim $p < n$): induttivamente

$$\operatorname{diam}(\ldots) \le \frac{p}{p+1} \cdot \operatorname{diam}(I_k)$$

$$\frac{p}{p+1} \le \frac{n}{n+1}, \qquad \operatorname{diam}(I_k) \le \operatorname{diam}(\sigma) \implies \text{ok}$$

(base induz: $n = 1$

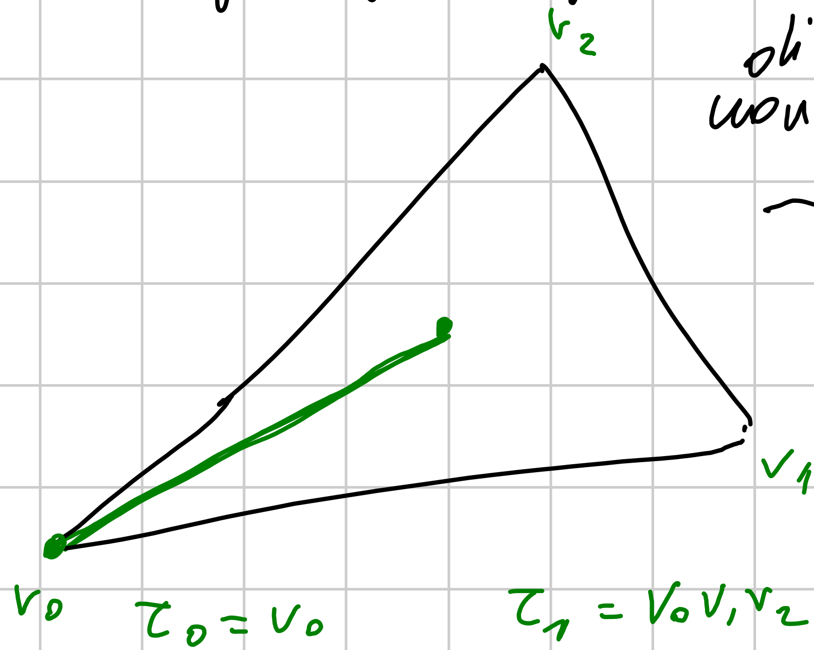



$$\operatorname{diam}(0,0') = \operatorname{diam}(1,0') = \frac{1}{2}\operatorname{diam}(0,1)$$

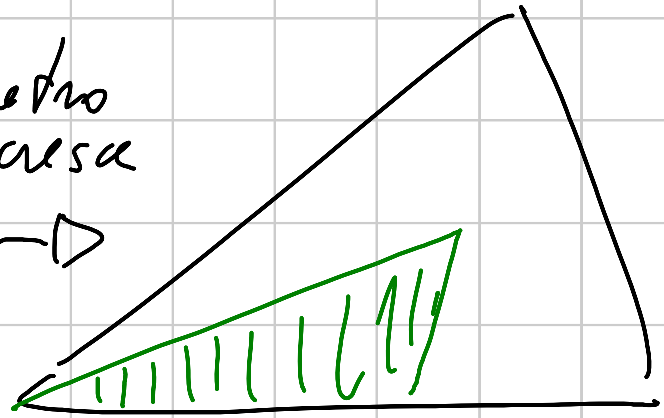
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$$

) —

Oppure $\tau_k = \sigma$ ma in tal caso posso anche supporre che in $\tau_0 \subset \tau_1 \subset \dots \subset \tau_k$ $\dim(\tau_j) = j$, infatti




diametro nondecresce $\rightsquigarrow$



$\tau_0 = v_0$
$\tau_1 = v_0 v_1$
$\tau_2 = v_0 v_1 v_2$

Chiaro che diam(simplesso) = distanza tra due vertici;

se uno dei due non è $c(\sigma)$ uso ancora

Ipotesi induttiva. Se è $c(\sigma) = \frac{1}{n+1}(v_0 + \dots + v_n)$

l'altro con massima distanza è $v_0$

(sto supponendo $\tau_0 = v_0$ $\tau_1 = v_0 v_1$ $\tau_2 = v_0 v_1 v_2 \dots$)

$\Longrightarrow$ i vertici del simplesso sono

$$v_0, \ \frac{1}{2}(v_0+v_1), \ \frac{1}{3}(v_0+v_1+v_2), \dots, \frac{1}{n+1}(v_0+\dots+v_n)$$

$$\Longrightarrow \text{diam} = \left\| \frac{1}{n+1}(v_0+\dots+v_n) - v_0 \right\|$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \frac{v_i - v_0}{n+1} \right\|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\|v_i - v_0\|}{n+1} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\operatorname{diam}(\sigma)}{n+1}$$

$$\leq \frac{n}{n+1} \cdot \operatorname{diam}(\sigma). \qquad \blacksquare$$

<u>Dim (Prop)</u>: cerchiamo una

$$\rho_n : C_n(X) \longrightarrow C_n^{\mathcal{U}}(X)$$

che sia inversa omotopica di $i_n : C_n^u(X) \to C_n(X)$

ovvero $\rho_n \circ i_n = id_{C_n^u(X)}$ e

$i_n \circ \rho_n \simeq id_{C_n(X)}$ come mappe tra complessi

cioè esiste

$$E_n : C_n(X) \longrightarrow C_{n+1}(X)$$

t.c. $\partial_{n+1} \circ E_n - E_{n-1} \circ \partial_n = i_n \circ \rho_n - id_{C_n(X)}$.

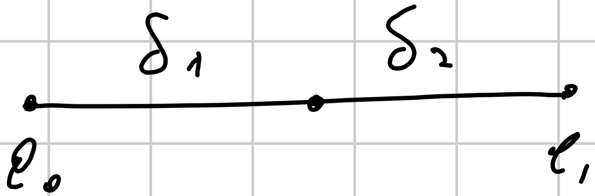
Definisco due operatori:

$$D_n = \sum_i \delta_i \qquad \delta_i : \Delta_n \to \Delta_n$$

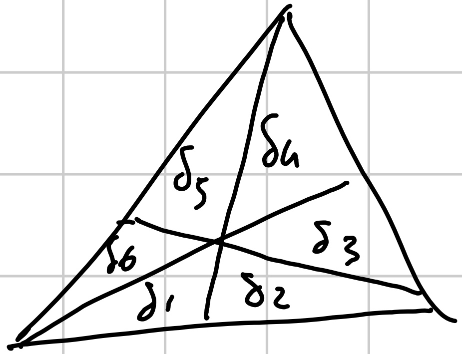
$\rightarrow$ esprimo $\Delta_n$ come somma degli elementi di $\Delta_n$ parametrizzati

$$\delta_i : \Delta_1 \to \Delta_1$$

$D_1 =$



$D_2 =$



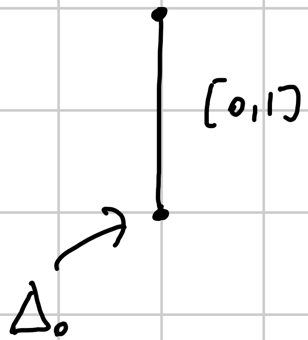

$\delta_i : \Delta_2 \to \Delta_2$

$\underbrace{E_n = \sum \varepsilon_i}$ $\qquad \varepsilon_i : \Delta_{n+1} \to \Delta_n \times [0,1]$

esprimo $\Delta_n \times [0,1]$ come somma di $(n+1)$-simplessi parametrizzati, così

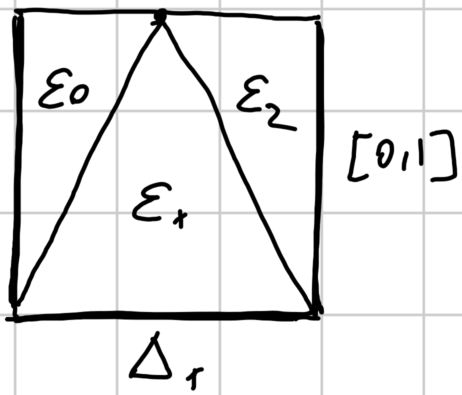
su $(\partial\Delta_n)\times[0,1]$ faccio $E_{n-1}(\partial\Delta_n)$
(sono $n$-simplessi che esprimono $(\partial\Delta_n)\times[0,1]$)
e faccio il cono da $c(\Delta_n)\times\{1\}$ su
$(\partial\Delta_n)\times[0,1]$ così espresso e su $\Delta_n\times\{0\}$.

$n=0$

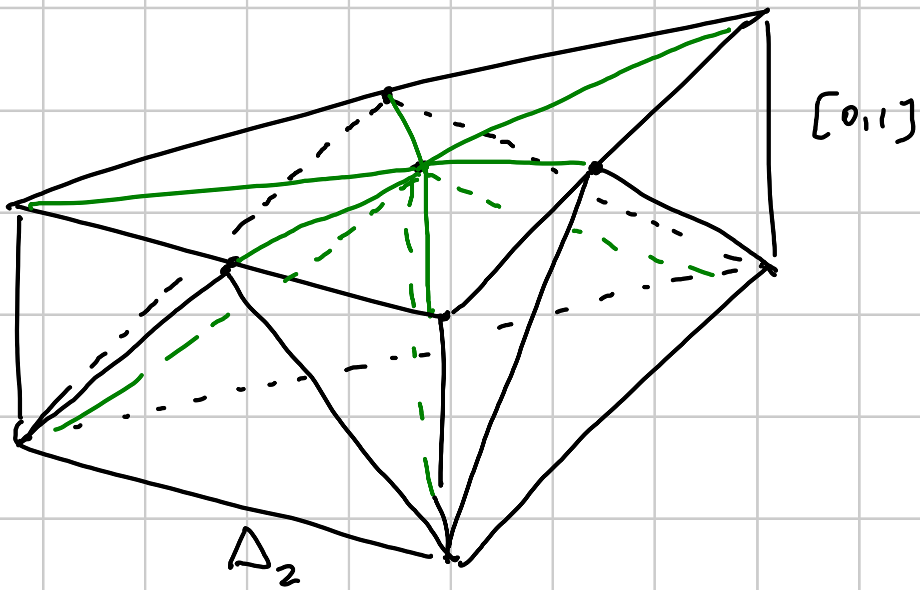



lo parametrizzo con $\Delta_1$.

$n = 1$




$n = 2$



$$\Delta_2 \times [0,1] = \sum_{i=0}^{9} \varepsilon_i$$

$\varepsilon_i$ $i = 1 \dots 9$
cono di $c(\Delta_n) \times \{1\}$
sui 9 triangoli verticali
$\varepsilon_0$ = cono di $c(\Delta_n) \times \{1\}$
sulla base inferiore.

Estendiamo:

$$D_n : C_n(X) \to C_n(X)$$
$$\sigma \mapsto \sum_i \sigma \circ \delta_i$$

$$E_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X)$$
$$\sigma \mapsto \sum \sigma \circ \varepsilon_i \, .$$

Per costruzione:

$$\underbrace{\partial_{n+1} E_n}_{\text{bordo prisma}} = \underbrace{D_n}_{\text{base sup}} + \underbrace{E_{n-1} \circ \partial_n}_{\text{sup. lat.}} - \underbrace{id_{C_n(X)}}_{\text{base inf.}}$$

$$\Rightarrow \partial_{n+1} \circ E_n - E_{n-1} \circ \partial_n = D_n - id_{C_n(X)}$$

cioè $E$ definisce un'omotopia nel senso delle mappe tra complessi tra $D$ e $id_{C(X)}$.

Esercizio: posto

$$E_n^{(k)} = \sum_{h=0}^{k-1} E_n \circ D_n^h$$

si ha che $E^{(k)}$ definisce un'omotopia tra $D^k$ e $id_{C(X)}$.

Per $k=1$ lo sappiamo.

Lo faccio per $k=2$. $\quad E_n^{(2)} = E_n \circ (D_n + id)$.

$$\partial_{n+1} \circ E_n^{(2)} - E_{n-1}^{(2)} \circ \partial_n =$$

$$= \partial_{n+1} \circ E_n \circ (D_n + id) - E_{n-1} \circ (D_{n-1} + id) \circ \partial_n$$

$$= \left( E_{n-1} \circ \partial_n + D_n - id \right) \circ \left( D_n + id \right)$$

$$- E_{n-1} \circ (D_{n-1} + id) \circ \partial_n$$

$$= \cancel{E_{n-1} \circ \underbrace{\partial_n \circ D_n}}^{(3)} + \cancel{E_{n-1}}^{(2)} \circ \partial_n + D_n^2 + \cancel{D_n}^{(1)} - \cancel{D_n}^{(1)} - id$$

$$- \cancel{E_{n-1} \circ \underbrace{D_{n-1} \circ \partial_n}}^{(3)} - \cancel{E_{n-1} \circ \partial_n}^{(2)}$$

fai sudd. bar. di dim n prendi il bordo = prendi il bordo e fai la suddiv. bar. di dim n-1

Ricordo: cerchiamo inversa omotopica

$$\rho_n : C_n^{\mathcal{U}}(X) \longrightarrow C_n(X)$$

cioè t.c. ...

Per il Lemma, usando numero di Lebesgue (~~se~~ X metrico) per ogni $\sigma : \Delta_n \to X$ possiamo trovare un minimo intero $k(\sigma)$ t.c.

$$D^{k(\sigma)}(\sigma) \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$$

(idea: $D^k(\sigma)$ è definito su una unione di simplessi con diam $\xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$).

Verrebbe voglia di porre

$$\rho_n : C_n(X) \to C_n^{\mathcal{U}}(X)$$

estendendo $\rho_n(\sigma) = D_n^{k(\sigma)}(\sigma)$.

E' vero che $\rho_n \circ i_n = id_{C^{\mathcal{U}}(X)}$

poiché $k(\sigma) = 0 \quad \forall \sigma \in C^{\mathcal{U}}(X)$.

Ma non è vero che $i_n \circ \rho_n \simeq id_{C(X)}$.

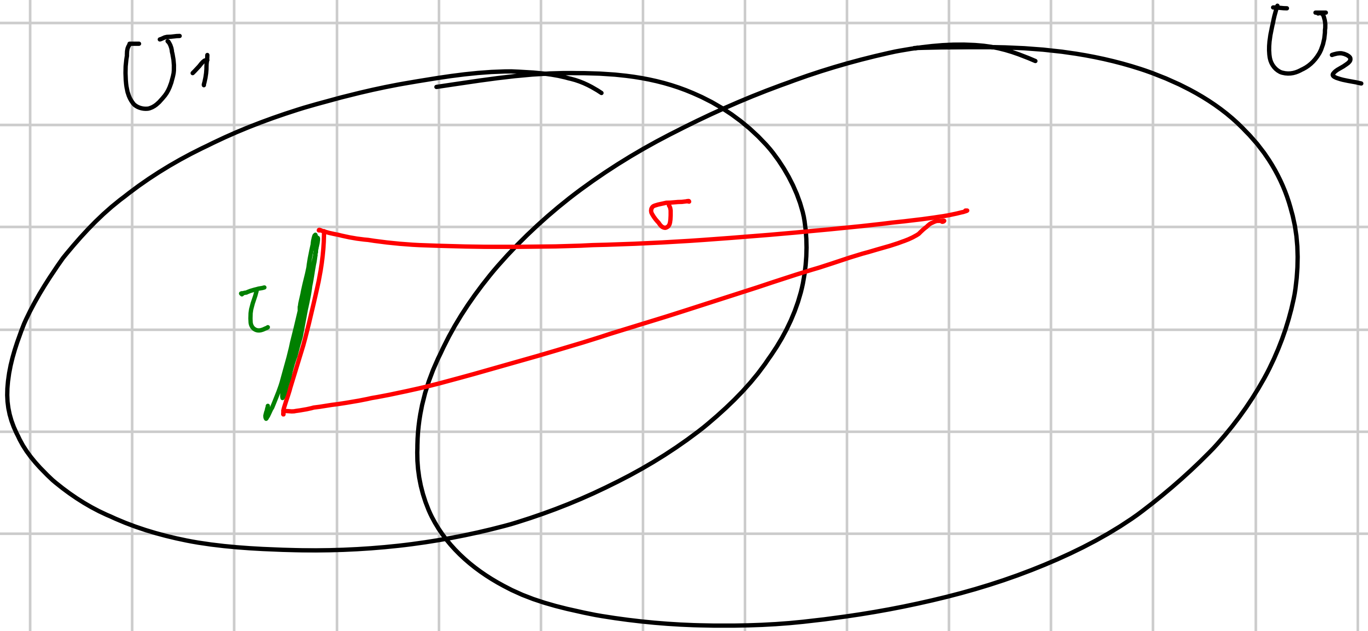
Poniamo invece:

$$E_n : C_n(X) \longrightarrow C^{\mathcal{U}}_{n+1}(X) \xhookrightarrow{i_{n+1}} C_{n+1}(X)$$
$$\sigma \longmapsto E_n^{(k(\sigma))}(\sigma)$$

e $$\rho_n(\sigma) = D_n^{k(\sigma)}\sigma + \underbrace{E_{n-1}^{(k(\sigma))}(\partial_n\sigma) - E_{n-1}(\partial_n\sigma)}_{\text{possono non essere uguali}}$$

in $E_n^{(k(\sigma))}(\partial_n\sigma)$ suddivido ogni faccia $\tau$ di $\partial\Delta_n$ tante volte quanto richiesto dall'intero $\sigma:\Delta_n\to X$ cioè $k(\sigma)$ volte

in $E_{n-1}(\partial_n\sigma)$ suddivido la faccia $\tau$ il numero di volte richiesto da $\sigma|_{\dots} = \tau:\Delta_{n-1}\to X$ cioè $k(\tau)$ volte e può essere $k(\tau) < k(\sigma)$




$k(\tau) = 0 \qquad k(\sigma) > 0$ .

Ora :

$$\left(\partial_{n+1}\circ E_n - E_{n-1}\circ\partial_n\right)(\sigma) =$$

$$= \partial_{n+1}\left( E_n^{(k(\sigma))}(\sigma)\right) - E_{n-1}(\partial_n\sigma)$$

$$= \left(E_{n-1}^{(k(\sigma))}(\partial_n\sigma) + D_n^{k(\sigma)}\sigma - \sigma\right) - E_{n-1}(\partial_n\sigma)$$

$$= D_n^{k(\sigma)}\sigma + E_{n-1}^{(k(\sigma))}(\partial_n\sigma) - E_{n-1}(\partial_n\sigma) - \sigma$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\rho_n(\sigma)}$$

$$= \rho_n(\sigma) - \sigma = (i_n \circ \rho_n)(\sigma) - \sigma$$

$\Longrightarrow$ E definisce una omotopia tra $i \circ \rho$ e $id_{C(X)}$.

Invece $\rho_n(\sigma) = D_n^{(k(\sigma))}\sigma + E_n^{(k(\sigma))}(\partial_n \sigma) - E_{n-1}(\partial_n \sigma)$

se applicato a $\sigma = i_n(\sigma)$

ho $k(\sigma)=0$ e $k(\tau)=0$ per tutti i $\tau$ nella def. di $E_{n-1}(\partial_n \sigma)$ $\Longrightarrow$

$$(i_n \circ \rho_n)(\sigma) = \sigma \qquad \blacksquare$$

Dimo escissione via prop:

$Z \subset A \subset X$ , $\overline{Z} \subset \mathring{A}$

Poniamo $U_1 = A$ $U_2 = X \setminus Z$ ;
l'ipotesi garantisce che $\mathring{U}_1 \cup \mathring{U}_2 = X$ .
Applico la Prop. a $\mathcal{U} = \{U_1, U_2\}$ .
Ora :

$$C_n^{\mathcal{U}}(A) = C_n(A)$$

$$C_n^{\mathcal{U}}(X \setminus Z) = C_n(X \setminus Z) .$$

Sappiamo:

$$\partial_{n+1} \circ E_n - E_{n-1} \circ \partial_n = i_n \circ \rho_n - id_{C_n(X)}$$

$$\rho_n \circ i_n = id_{C_n^{\mathcal{U}}(X)}$$

inoltre tutte le mappe mandano catene in $A$ in catene in $A$ $\Longrightarrow$ $i_n$ e $\rho_n$ inducono

$$\frac{C_n^{\mathcal{U}}(X)}{C_n^{\mathcal{U}}(A)} \xhookrightarrow{\bar{i}_n} \frac{C_n(X)}{C_n(A)}$$

$$\frac{C_n(X)}{C_n(A)} \xrightarrow{\bar{\rho}_n} \frac{C_n^{\mathcal{U}}(X)}{C_n^{\mathcal{U}}(A)}$$

e restano inverse omotopiche l'una dell'altra

$$\Rightarrow H_*(X,A) \cong H_*\left(\frac{C_*^{\mathcal{U}}(X)}{C_*^{\mathcal{U}}(A)}\right).$$

Inoltre ho un isomorfismo

$$\frac{C_n(X\setminus Z)}{C_n(A\setminus Z)} \xrightarrow{\varphi} \frac{C_n^{\mathcal{U}}(X)}{C_n^{\mathcal{U}}(A)}$$

che induce isomorfismo

$$H_*(X\setminus Z, A\setminus Z) \longrightarrow H_*\left(\frac{C_*^{\mathcal{U}}(X)}{C_*^{\mathcal{U}}(A)}\right)$$

$\varphi$ indotto da inclusione $X \setminus Z \hookrightarrow X$ :

ben def : $\sigma : \Delta_n \to X \setminus Z \Rightarrow \sigma \in C_n^{\mathcal{U}}(X)$

$c \in C_n(A \setminus Z) \Rightarrow c \in C_n^{\mathcal{U}}(A)$ ✓

iniettiva : $c \in C_n(X \setminus Z)$ , $c \in C_n^{\mathcal{U}}(A)$
$\Rightarrow c \in C_n(A \setminus Z)$ _

surjective: $d \in C_n^u(X)$ ✓

$\Rightarrow d = c + e \qquad c \in C_n(X \setminus Z)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad e \in C_n(A)$

$\Rightarrow [d] = \varphi([c])$. $\blacksquare$