UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 30/6/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. È dato un sistema lineare omogeneo $\mathcal{S}$ in 9 variabili. Nello spazio delle soluzioni di $\mathcal{S}$ sono dati 2 vettori linearmente indipendenti che però non lo generano. Che rango può avere la matrice di $\mathcal{S}$?

2. Data $\mathcal{B} = (v_1,\ v_2)$ base di $\mathbb{R}^2$, trovare v_1 sapendo che $v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ e che $\left[\begin{pmatrix} -31 \\ 7 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$.

3. Nello spazio $W = \{z \in \mathbb{C}^{10} :\ -iz_2 + 7z_8 = (1+i)z_5 + 2z_{10} = 0\}$ è dato un sottospazio U di dimensione 4. Per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha la certezza che un sottospazio V di dimensione n di W intersechi U in modo non banale?

4. Risolvere $\begin{cases} 2x - y + 4z = 6 \\ 5x + 2y - 3z = 19 \\ x + 4y - 11z = 7. \end{cases}$

5. Calcolare $\det \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

6. In una matrice 5×8, quante sono le orlate di una sottomatrice 3×3?

7. Posto $X = \mathrm{Span}(e_1 - 2e_2 + 4e_3,\ 3e_1 + 5e_2 - e_3)$ e $Y = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + x_2 + x_3 = -4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 0\}$, trovare la proiezione su X di $4e_1 - 6e_2 + 9e_3$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 30/6/15 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare i sottospazî seguenti:

$$X = \mathrm{Span}(\mathcal{B}) \quad \text{con} \quad \mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \qquad Y : \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

(A) (4 punti) Trovare equazioni cartesiane di X di cui la prima non contenga x_1 e la seconda non contenga x_3.

(B) (4 punti) Trovare la base $\mathcal{C}$ di Y consistente di due vettori di cui il primo con seconda componente nulla e il secondo con quarta componente nulla, e per entrambi le altre componenti intere e prime fra loro, con la prima positiva.

(C) (4 punti) Detta $f : X \to Y$ l'applicazione lineare tale che $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 4 & 10 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$ trovare $f\begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$.

2. Considerare la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 9 \\ -1 & 2 & 8 \\ 7 & 3 & -5 \end{pmatrix}$ e l'associata applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.

(A) (4 punti) Calcolare il rango di A e dedurne la dimensione del nucleo di f.

(B) (4 punti) Provare che vale la decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(f) \oplus \mathrm{Ker}(f)$ e calcolare l'associata proiezione su $\mathrm{Im}(f)$ di $e_1 + e_2 - 10e_3$.

(C) (4 punti) Posto $X = \mathrm{Span}(e_2,\ e_3)$ provare che restringendo f si ottiene un'applicazione lineare invertibile $g : X \to \mathrm{Im}(f)$, e calcolare $g^{-1}(11e_1 + 17e_3)$.

Risposte

5. ♡

1. Al più 6

2. $v_1 = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $5 \leqslant n \leqslant 8$

4. $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -5 \\ 26 \\ 9 \end{pmatrix}$

5. 3

6. 10

7. $e_1 - 24e_2 + 30e_3$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\begin{cases} 13x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 0 \\ -7x_1 + 13x_2 + 9x_4 = 0 \end{cases}$

(B) $\left(\begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 8 \\ -22 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$

(C) $\begin{pmatrix} 26 \\ 11 \\ 17 \\ -44 \end{pmatrix}$

2.

(A) $\operatorname{rank}(A) = 2,\ \dim(\operatorname{Ker}(f)) = 1$

(B) $-e_1 + 4e_2 - 11e_3$

(C) $4e_2 - e_3$