UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 26/1/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Data $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{2\,3}$.

2. Data la base $\mathcal{B} = (e_1 + e_2 - e_3,\ -2e_1 + 3e_2 + 4e_3)$ di $V = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 7x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$, provare che $v = -5e_1 + 5e_2 + 9e_3$ appartiene a V e trovare $[v]_{\mathcal{B}}$.

3. Data $A = (v_1,\ v_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ con $\det(A) = 2 + i$,
porre $B = ((2-i)v_1 - 3v_2,\ iv_1 + (3+i)v_2)$ e calcolare $\det(B)$.

4. Provare che esiste un'unica $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che
$f\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, quindi calcolare $f\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$.

5. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} tx + (t+2)y = 3t + 4 \\ (2t-3)x + (3t-4)y = 1 + 2t. \end{cases}$

6. Determinare la molteplicità di $z_0 = i$ come radice di
$p(z) = 2z^5 - 3z^4 + 4(1+i)z^3 - (1+2i)z^2 + 2(i-1)z + 2i$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 4x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 0\}$ e, al variare di t nei reali, $Y_t = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} t^2 - 1 \\ t - 1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
stabilire per quali t si ha $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y_t$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 26/1/15 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio W di equazione $10x_1 - 5x_2 + 15x_3 + 6x_4 = 0$
e il vettore $y = 3e_1 - 4e_3 + 5e_4$.

(A) (1 punto) Provare che y appartiene a W.

(B) (4 punti) Trovare tutti i vettori di W aventi due coordinate nulle e le altre due intere e prime fra loro, con quella di indice maggiore positiva.

(C) (4 punti) Disporre i vettori trovati al punto precedente in modo che sia crescente la somma dei valori assoluti delle coordinate, provare che generano W ed estrarne una base $\mathcal{B}$ di W

(D) (3 punti) Trovare le coordinate del vettore y rispetto a $\mathcal{B}$

2. Al variare di $s, t \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$F_s = \begin{pmatrix} 3 \\ -s \\ 2s \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} -s \\ s+1 \\ s+3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4-s \\ 1-2s \\ 1-3s \end{pmatrix} \right), \qquad E_t : \begin{cases} (1-t)x_1 + (5-t)x_2 + 4tx_3 = 1-7t \\ 3tx_1 + (1+10t)x_2 + (7+t)x_3 = -12. \end{cases}$$

(A) (2 punti) Esibire $s_0 \in \mathbb{R}$ e $m_0, m \in \mathbb{N}$ tali che F_s abbia dimensione m_0 per $s = s_0$ e dimensione m per $s \neq s_0$.

(B) (2 punti) Esibire $t_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n \in \mathbb{N}$ tali che E_t abbia dimensione n_0 per $t = t_0$ e dimensione n per $t \neq t_0$.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_s per $s = -2$ e per $s = s_0$.

(D) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = 2$ e per $t = t_0$.

(E) (2 punti) Determinare la posizione reciproca di F_{s_0} ed E_{t_0}.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♡

1. $-\frac{7}{15}$

2. $(7 \ \ -2 \ 5) \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} = 0;\ [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. $12 + 11i$

4. f è assegnata su una base; $f\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

5. Nessuna per $t = 3$, infinite per $t = 2$, una altrimenti

6. 2

7. t diverso da -2 e da $1/4$

Soluzioni

1.

(A) $(10,-5,15,6)\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-4\\5\end{pmatrix}=30-60+30=0$

(B) $\begin{pmatrix}1\\2\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\-2\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-3\\0\\0\\5\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\6\\0\\5\end{pmatrix}$

(C) L'ordine è già il precedente, e bisogna tenere il primo, il secondo e il quarto vettore

(D) $\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$

2.

(A) $s_0=2,\ m_0=1,\ m=2$

(B) $t_0=-1,\ n_0=2,\ n=1$

(C) $3x_1+2x_2-4x_3=29,\qquad \begin{cases}3x_1+2x_2=5\\5x_1+2x_3=23\end{cases}$

(D) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix}79\\-30\\0\end{pmatrix}+\mathrm{Span}\begin{pmatrix}47\\-19\\13\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\right)$

(E) Incidenti nel punto $\begin{pmatrix}13\\-17\\-21\end{pmatrix}$