UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 26/1/15 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Data $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{3\,2}$.

2. Data la base $\mathcal{B} = (e_1 - e_2 - 2e_3,\ e_1 + 3e_2 + e_3)$ di $V = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0\}$, provare che $v = 2e_1 - 6e_2 - 7e_3$ appartiene a V e trovare $[v]_{\mathcal{B}}$.

3. Data $A = (v_1,\ v_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ con $\det(A) = 2 - i$,
porre $B = ((2+i)v_1 - 2v_2,\ 3iv_1 + (1+i)v_2)$ e calcolare $\det(B)$.

4. Provare che esiste un'unica $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ lineare tale che
$f\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ e $f\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, quindi calcolare $f\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} (t-1)x + (t+1)y = 3t+1 \\ (2t-5)x + (3t-7)y = 2t-1. \end{cases}$

6. Determinare la molteplicità di $z_0 = i$ come radice di
$p(z) = 2z^5 + (6-9i)z^4 - (13+15i)z^3 + (5i-9)z^2 - 3(1+i)z + 2i - 3$.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 5x_1 + 7x_2 - 9x_3 = 0\}$ e, al variare di t nei reali, $Y_t = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 5+t^2 \\ t-4 \\ 1 \end{pmatrix}$, stabilire per quali t si ha $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y_t$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 26/1/15 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare il sottospazio X di equazione $5x_1 - 6x_2 + 10x_3 + 15x_4 = 0$
e il vettore $v = -2e_1 + 5e_2 + 4e_3$.

(A) (1 punto) Provare che v appartiene a X.

(B) (4 punti) Trovare tutti i vettori di X aventi due coordinate nulle e le altre due intere e prime fra loro, con quella di indice minore positiva.

(C) (4 punti) Disporre i vettori trovati al punto precedente in modo che sia crescente la somma dei valori assoluti delle coordinate, provare che generano X ed estrarne una base $\mathcal{B}$ di X

(D) (3 punti) Trovare le coordinate del vettore v rispetto a $\mathcal{B}$

2. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_t = \begin{pmatrix} 1-t \\ 1 \\ 3t \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} t+1 \\ -t \\ t+3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-2t \\ 4-t \\ 1-3t \end{pmatrix}\right), \qquad F_s : \begin{cases} (1-s)x_1 + 4sx_2 + (5-s)x_3 = 1-7s \\ 3sx_1 + (7+s)x_2 + (1+10s)x_3 = -12. \end{cases}$$

(A) (2 punti) Esibire $t_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n \in \mathbb{N}$ tali che E_t abbia dimensione n_0 per $t = t_0$ e dimensione n per $t \neq t_0$.

(B) (2 punti) Esibire $s_0 \in \mathbb{R}$ e $m_0, m \in \mathbb{N}$ tali che F_s abbia dimensione m_0 per $s = s_0$ e dimensione m per $s \neq s_0$.

(C) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_t per $t = -2$ e per $t = t_0$.

(D) (3 punti) Trovare equazioni parametriche di F_s per $s = 2$ e per $s = s_0$.

(E) (2 punti) Determinare la posizione reciproca di E_{t_0} ed F_{s_0}.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 26/1/15 — Quesiti

Risposte

5. ♢

1. $-\frac{1}{2}$

2. $(5\ \ -3\ 4)\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\-7\end{pmatrix}=0;\ \ [v]_{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}$

3. $11+17i$

4. f è assegnata su una base; $f\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\-9\\9\end{pmatrix}$

5. Nessuna per $t=4$, infinite per $t=3$, una altrimenti

6. 3

7. t diverso da 1 e da $-12/5$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $(5,-6,10,15)\cdot\begin{pmatrix}-2\\5\\4\\0\end{pmatrix}=-10-30+40=0$

(B) $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}3\\0\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\3\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\5\\0\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\5\\3\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}6\\5\\0\\0\end{pmatrix}$

(C) L'ordine è già il precedente, e bisogna tenere il primo, il secondo e il quarto vettore

(D) $\begin{pmatrix}-4\\2\\1\end{pmatrix}$

2.

(A) $t_0=2,\ n_0=1,\ n=2$

(B) $s_0=-1,\ m_0=2,\ m=1$

(C) $2x_1+3x_2-4x_3=33,\qquad \begin{cases}2x_1+3x_2=1\\5x_2+2x_3=17\end{cases}$

(D) $\frac{1}{13}\begin{pmatrix}79\\0\\-30\end{pmatrix}+\mathrm{Span}\begin{pmatrix}47\\13\\-19\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}\right)$

(E) Incidenti nel punto $\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-5\\4\\7\end{pmatrix}$