

Alg. Lin 22/10/14 - Lezioni

Lemma 3: dato $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ si ha

$$v_0 \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \iff \text{Span}(v_1, \dots, v_k) = \text{Span}(v_0, v_1, \dots, v_k)$$

Dim: $\Rightarrow$ C ovvio -

$\supset$: Supponiamo $v_0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$ -

Se $v \in \text{Span}(v_0, v_1, \dots, v_k)$ ho

$$v = \alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

$$= (\alpha_0 \lambda_1 + \alpha_1) v_1 + \dots + (\alpha_0 \lambda_k + \alpha_k) \cdot v_k$$

$$\Rightarrow v \in \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \quad _$$

$$\Leftarrow v_0 \in \text{Span}(v_0, \dots, v_k) = \text{Span}(v_1, \dots, v_k) \quad \square$$

Il metodo di costruzione di basi (ESTRAZIONE).

Prop: dati $w_1, \dots, w_h$ generatori di V il seguente algoritmo conduce a una base di V :

- si scartano tutti i w_i iniziali nulli fino al primo w_{i_1}

non nullo, che si tiene;

-) si esaminano i successivi w_i scartando quelli proporzionali a w_i , fino al primo non proporz. w_{i_2} che si tiene

-) si esaminano i successivi w_i scartando quelli che sono in $\text{Span}(w_{i_1}, w_{i_2})$ fino al primo $w_{i_3} \notin \text{Span}(w_{i_1}, w_{i_2})$

...

-) costruiti $w_{i_1}, \dots, w_{i_k}$ si esaminano i successivi w_i scartando quelli in $\text{Span}(w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$ fino

al primo $w_{i_{k+1}} \notin \text{Span}(w_{i_1}, \dots, w_{i_k})$

Avanti fino a esaminare la lista -

Es: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 \\ -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -100 \\ 800 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 19 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 37 \end{pmatrix}$

$$i_1 = 4$$

$$i_2 = 7$$

$$\begin{pmatrix} 13 \\ 19 \end{pmatrix} \notin \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} \right) \text{ i.e. } \begin{cases} -\alpha + 7\beta = 13 \\ 8\alpha + 2\beta = 19 \end{cases} \text{ ha soluz?}$$

$$\alpha = \dots$$

$$\beta = 123/58 \quad \text{No}$$

Dim: Grazie al Lem 2 (ieri) applicato a ogni piano
ho due soss lin. indep.

Grazie al Lem 3 applicato a ogni piano il stsp.
generato dai vettori tenuti fuso e un certo punto
è uguale al stsp. generato da tutti quelli esaminati
fuso e quel punto. Dunque alle fine:

$$\text{Span}(w_{i_1}, \dots, w_{i_m}) = \text{Span}(w_1, \dots, w_h) = V$$

$\Rightarrow w_{i_1}, \dots, w_{i_m}$ generano —



Con: Sia V sp. rett. di dim. n —
Per un sistema $(v_1, \dots, v_m)$ di vettori
sono fatti equivalenti:

-) $v_1, \dots, v_m$ l.i.c. indep.
-) $v_1, \dots, v_m$ generano V —

Cioè: se voglio verificare che un sistema di
vettori è una base, è sufficiente:

- vedere che sono nel numero giusto (dimensione)
- verificare una delle due metà della def. di base

(in pratica: conviene verificare l'indipendenza lineare).

$$\underline{\text{Es}}: \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 19 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

sono lin. indep $\Rightarrow$ generano $\Rightarrow$ sono base.

$$\underline{\text{Es}}: \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \pi \\ 51 \\ -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sono lin. indep. $\Rightarrow$ generano $\Rightarrow$ sono base.

Dimo (con) :

lin. indep $\Rightarrow$ posso completare a base aggiungendo

$n - n = 0$ vettori $\Rightarrow$ sono base
 $\uparrow$ $\nwarrow$
dim numero che ho

generano $\Rightarrow$ posso estrarne base scartando.

$n - n = 0$ vettori $\Rightarrow$ sono base
 $\uparrow$ $\nwarrow$
numero che ho dim 

Dimensione di sottospazi

Lem: se $\dim_{\mathbb{R}} W = +\infty$ allora per ogni h
esistono in W sistemi con h vettori lin. indep.

Es: in $\mathbb{R}[t]$ posso trovare sistemi con $4 \cdot 10^9$
vett. lin. indep. 999999999
(basta prendere $1, t, t^2, \dots, t$)

Dim(Lem): $W \neq \{0\} \Rightarrow \exists w_1 \neq 0$

$W \neq \text{Span}(w_1) \Rightarrow w_2 \notin \text{Span}(w_1)$

$W \neq \text{Span}(w_1, w_2) \Rightarrow w_3 \notin \text{Span}(w_1, w_2)$
↑

altri aut.
di $W=2$

avanti con: per Lem 2
sono sempre lin. indep -



Prop: Sia $\dim_{\mathbb{R}}(V)=n$ e $W \subset V$ ssp -
Allora

$$\dim_{\mathbb{R}}(W) \leq n$$

Inoltre $W=V \iff \dim(W)=n$ -

Dim: Se W avesse $\dim = +\infty$ per Lem prec

esistono in W sistemi con $m+1$ vett. lin. indip.
ma $W \subset V \Rightarrow$ anche in V : impossibile _

Dunque W ha dim finita m _ Se prendo una
base $w_1, \dots, w_m$ ho $w_1, \dots, w_m$ sono lin. indep.
e appartengono a $V \Rightarrow m \leq n$ _

Quotie se $m=n$ per le Prop di pag. 2 sono
una base di $V \Rightarrow W=V$ _



Es: 3 sottospazi di $\mathbb{R}^3$ possono essere disgiunti

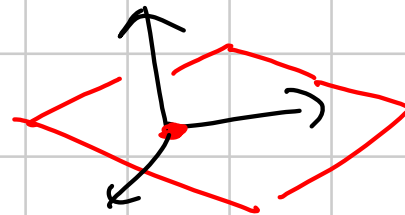
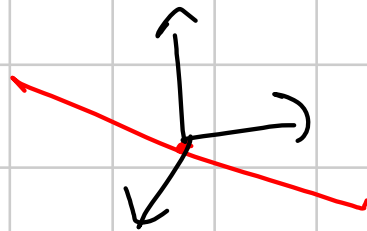
0

1

2

3

$\{0\}$

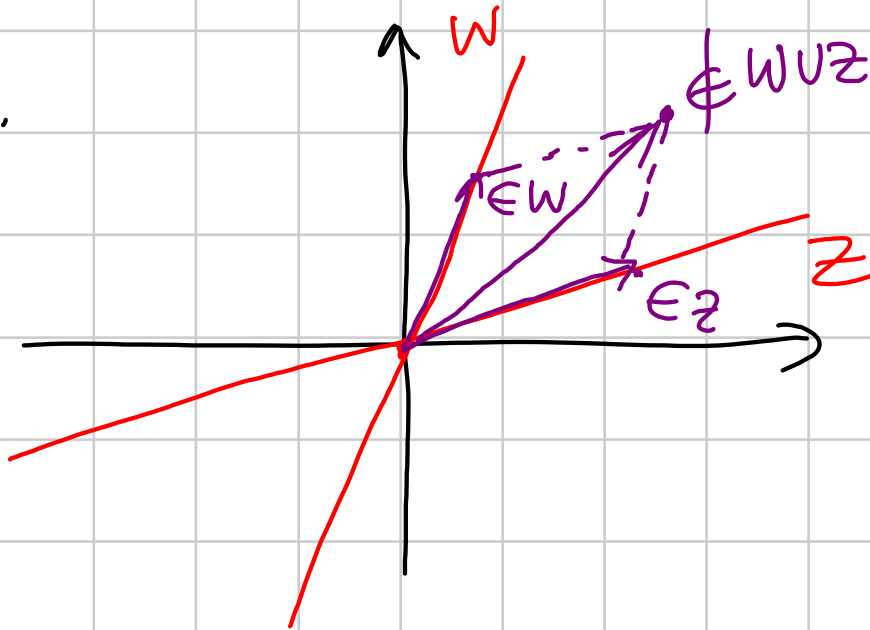


$\mathbb{R}^3$

Oss: se W, Z sono sottosp. di $V \Rightarrow$ anche $W \cap Z$.

Lemma: $W \cup Z$ è stsp. $\Leftrightarrow W \cap Z$ oppure $Z \subset W$.

Es.



Dimo (Lem): $\Leftarrow$ ovvle $W \cup Z$ è $W \cup Z$
 $\Rightarrow$ Se p.a. $W \not\subset Z$ e $Z \not\subset W$

$$\exists w \in W, w \notin Z \quad \exists z \in Z, z \notin W$$

Se $W \cup Z$ fosse sottospazio allora

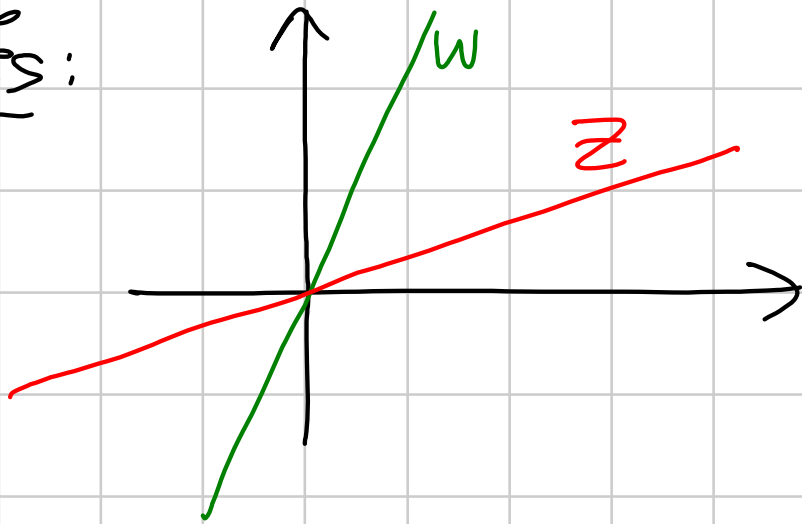
$$\begin{array}{ccc} & w+z & \text{dovrebbe appartenere a } W \cup Z \text{ cioè a} \\ \nearrow & \uparrow & \\ w & z & W \text{ o } Z; \\ \cap & \cap & \\ W \cup Z & W \cup Z & \end{array}$$

- se $w+z = w' \in W$ allora $z = w' - w \in W$ No
- se $w+z = z' \in Z$ allora $w = z' - z \in Z$ No $\square$

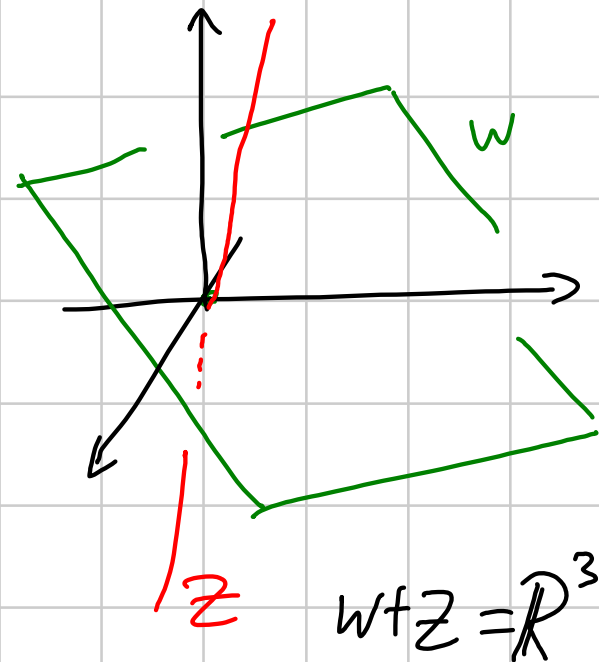
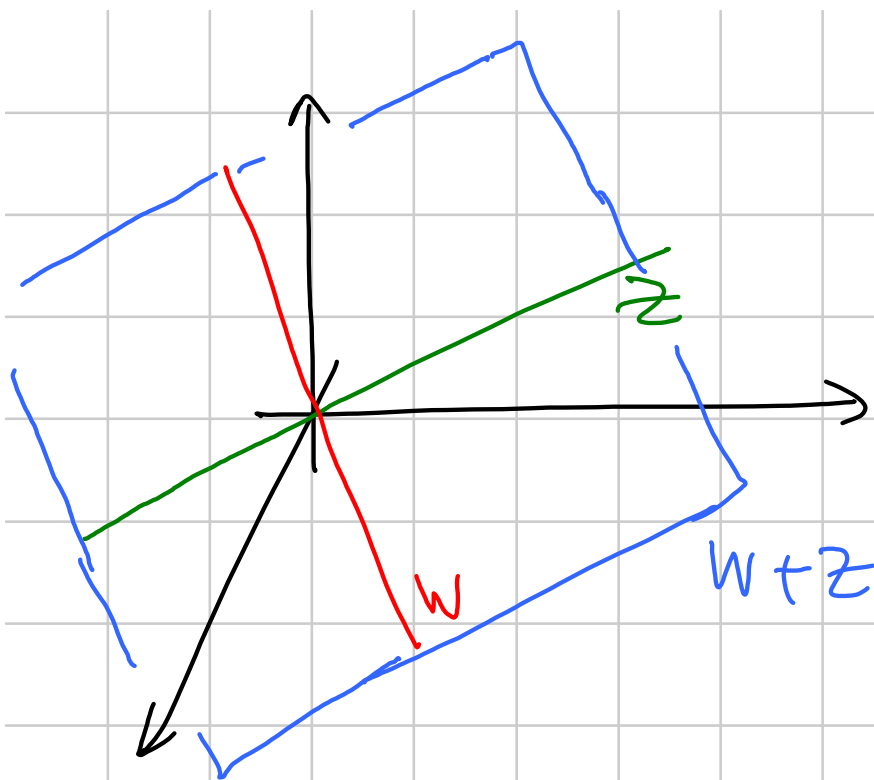
Def: se W, Z sono ssp di V poniamo
 $W + Z = \text{Span}(W \cup Z)$ -

esempio

Es:



$$W + Z = \mathbb{R}^2$$



Prop: $W+Z = \{w+z : w \in W, z \in Z\}$

Din: poipo $X = \{w+z : w \in W, z \in Z\}$.

Provo che $\bar{X}$ è $\text{Span}(W \cup Z)$:

-) $\bar{X}$ è un sottosp.
-) contiene W e Z
- ∴) se Y è spg. e con W e Z allora contiene X .

Infatti:

$$\begin{aligned} \bullet) \quad x_1, x_2 \in X, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \text{cioè} \quad x_1 = w_1 + z_1 \quad w_{1,2} \in W \\ x_2 = w_2 + z_2 \quad z_{1,2} \in Z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 = \underbrace{(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)}_{\in W} + \underbrace{(\lambda_1 z_1 + \lambda_2 z_2)}_{\in Z}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in X$$

$$\therefore) X \supset W \quad \begin{array}{l} \text{poiché} \\ \text{se } w \in W \text{ ho} \end{array} \quad w = \underbrace{w}_{\substack{\in \\ W}} + \underbrace{0}_{\substack{\in \\ Z}} \Rightarrow w \in X$$

anal. $X \supset Z$

$$\therefore) Y \supset W, Y \supset Z, Y \text{ sottosp}$$

$$\Rightarrow \text{ preso } x \in X \quad \text{ho} \quad x = \underbrace{w}_{\substack{\in \\ W \\ \subset}} + \underbrace{z}_{\substack{\in \\ Z}}$$

$$Y \subset Y$$

$$Y \text{ sottosp.} \Rightarrow x = w + z \in Y$$

ho provato che $Y \supset X$.



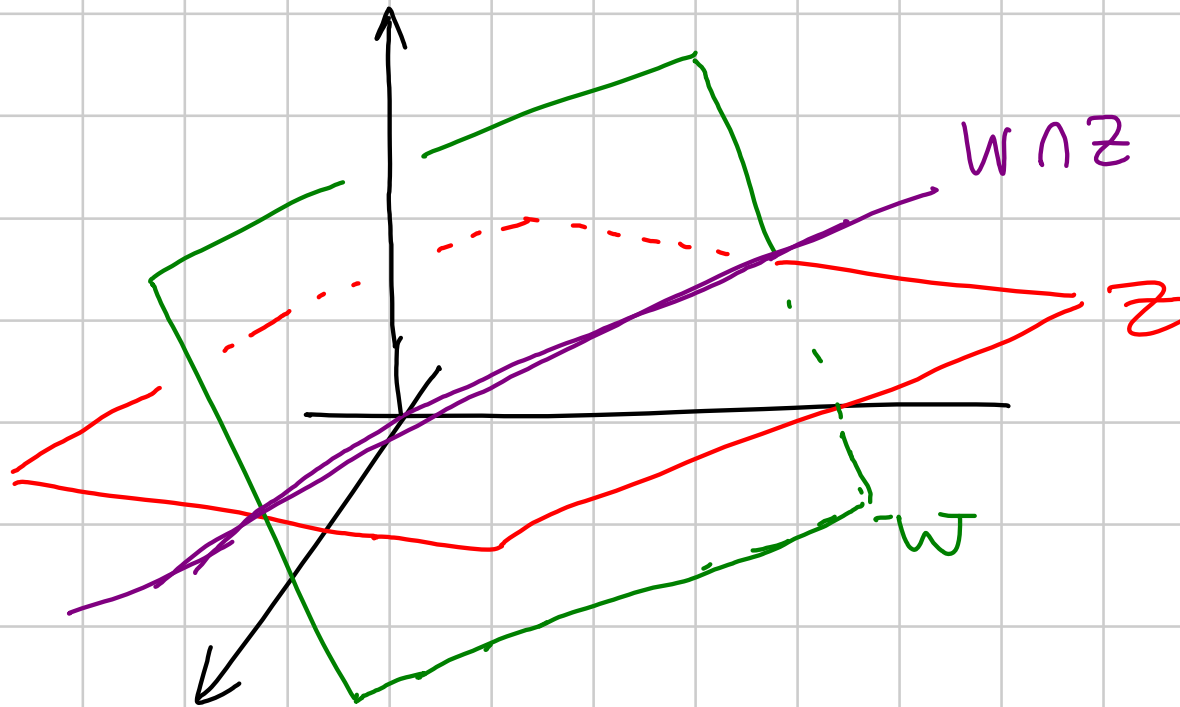
Teo (formule di Grassmann):

Sia V sp. vett. di dim. finite; siano $W, Z \subset V$ sp.

$$\Rightarrow \dim(W \cap Z) + \dim(W + Z) = \dim(W) + \dim(Z)$$

Oss. In pratica si usa per calcolare $\dim(W+Z)$ dopo avere
calcolato quelle di $W, Z, W \cap Z$.

Es:



$$\underset{1}{\dim(W \cap Z)} + \underset{3}{\dim(W+Z)} = \underset{2}{\dim W} + \underset{2}{\dim Z}$$

Dimo: Chiamo $p = \dim(W \cap Z)$

$$q = \dim(W)$$

$$r = \dim(Z)$$

Devo provare che $\dim(W+Z) = q + r - p$

Scelgo una base $x_1, \dots, x_p$ di $W \cap Z$

Poiché $x_1, \dots, x_p$ sono lin. indep. in W posso completarle

una base $x_1, \dots, x_p, w_{p+1}, \dots, w_q$ di W

Poiché $x_1, \dots, x_p$ sono lin. indep. in Z posso completarli a una base $x_1, \dots, x_p, z_{p+1}, \dots, z_n$ di Z .

Affermo che

$$\underbrace{x_1, \dots, x_p}_p, \underbrace{w_{p+1}, \dots, w_q}_{q-p}, \underbrace{z_{p+1}, \dots, z_n}_{n-p} \text{ è base di } Z+W$$

$$\Rightarrow \dim(Z+W) = q + n - p; \text{ dunque basta } _$$

Sono lin. indep.: Supponiamo

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p + \beta_{p+1} w_{p+1} + \dots + \beta_q w_q + \gamma_{p+1} z_{p+1} + \dots + \gamma_n z_n = 0$$

Dobbiamo vedere che tutti i coeff sono 0. Ho:

$$\underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \beta_{p+1} w_1 + \dots}_{\substack{\cap \\ W}} = \underbrace{-\gamma_{p+1} z_{p+1} - \dots - \gamma_n z_n}_{\substack{\cap \\ Z}}$$

$\Rightarrow$ esso sta in $W \cap Z$, dunque esistono $\delta_1, \dots, \delta_p$ t.c.

$$-\gamma_{p+1} z_{p+1} - \dots - \gamma_n z_n = \delta_1 x_1 + \dots + \delta_p x_p$$

$$\text{dunque } \delta_1 x_1 + \dots + \delta_p x_p + \gamma_{p+1} z_{p+1} + \dots + \gamma_n z_n = 0$$

$$\Rightarrow \delta_1 = \dots = \delta_p = \gamma_{p+1} = \dots = \gamma_n = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p + \beta_{p+1} w_{p+1} + \dots + \beta_q w_q = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_p = \beta_{p+1} = \dots = \beta_q = 0$$

ho finito

è uguale a $-\beta_{p+1} z_{p+1} - \dots$ ma ho già visto
che le x_i sono nulle $\rightarrow$ è il vett. nullo

Generano: prendo $y \in W + Z$, cioè $y = w + z$
 $\begin{matrix} \uparrow & \uparrow \\ W & Z \end{matrix}$

$$\Rightarrow w = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_p x_p + \beta_{p+1} w_{p+1} + \dots + \beta_q w_q$$

$$e \quad z = \gamma_1 x_1 + \dots + \gamma_p x_p + \delta_{p+1} z_{p+1} + \dots + \delta_r z_r$$

dunque $x = w + z = (\alpha_1 + \gamma_1) x_1 + \dots + (\alpha_p + \gamma_p) x_p$
 $+ \beta_{p+1} w_{p+1} \dots + \beta_q w_q + \delta_{p+1} z_{p+1} + \dots + \delta_n z_n$
 $\square$

Applicazioni lineari

Def: se V, W sono spazi vett. una funzione
 $f: V \rightarrow W$ si dice lineare se
 rispetta le operazioni di spazio vettoriale, cioè
 $f(\underset{V}{0}) = \underset{W}{0}$, $f(\underset{V}{v_1} + \underset{V}{v_2}) = f(\underset{V}{v_1}) + f(\underset{V}{v_2})$, $f(\underset{V}{\lambda \cdot v}) = \underset{W}{\lambda} \cdot f(\underset{V}{v})$.

Es: Se B è base di V
 $V \rightarrow \mathbb{R}^n$
 $v \mapsto [v]_B$ è lineare (visto).

Es: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 - 9x_2 \end{pmatrix}$$

$$f(0) \neq 0 \checkmark;$$

$$f(x+y) = f\begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ x_2+y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3(x_1+y_1) + 5(x_2+y_2) \\ -(x_1+y_1) + 4(x_2+y_2) \\ 7(x_1+y_1) - 9(x_2+y_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 4x_2 \\ 7x_1 - 9x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3y_1 + 5y_2 \\ -y_1 + 4y_2 \\ 7y_1 - 9y_2 \end{pmatrix} = f(x) + f(y) \quad \checkmark$$

$$f(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot f(x) \quad \checkmark$$

Tale f va bene perché:

le componenti dell'immagine sono funzioni
"buone" (polinomi di grado 1)

nelle componenti del punto -

Fatto: vanno bene esattamente le funzioni con π
(o moltiplicate) -

$$\text{Es: } f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \log(e^{7x_1 - \pi \cdot x_2})$$

$$\bar{e} \text{ lineare: } f(x) = 7x_1 - \pi \cdot x_2 -$$

E_S: $C^0([0,1], \mathbb{R})$ = funzioni continue su $[0,1]$
(è sottosp. di $\mathcal{F}([0,1], \mathbb{R})$)

$$\begin{array}{ccc} C^0([0,1], \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & & \uparrow \\ x & \longmapsto & \int_0^1 x(t) dt \end{array}$$

è lineare -

E_S: $D: \mathbb{R}[t] \rightarrow \mathbb{R}[t]$

$$D\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot t^{n-1}$$

è lineare -

$\mathcal{L}_S$; $\text{tr} : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

traccia $\nearrow$

$A \mapsto \sum_{i=1}^n (A)_{ii}$

matrici
quadrate
 $n \times n$

$\parallel$

Traccia =

Summa dei coeff

sulle diagonali principali

