

## Alg. Lin. 12/11/14

Def:  $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ : è quella matrice t.c.  $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ .

Prop: se  $M$  è la matrice di cambio da  $\mathcal{B}$  a  $\mathcal{B}'$   
se  $N$  è la matrice di cambio da  $\mathcal{C}$  a  $\mathcal{C}'$  ho  
$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{C}'} = N^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot M$$

Dim:  $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M \quad \mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot N \Rightarrow \mathcal{C} = \mathcal{C}' \cdot N^{-1}$

$$f \cdot B = c \cdot [f]_B^c \quad \text{Ora:}$$

$$f \cdot B' = f \cdot B \cdot M = c \cdot [f]_B^c \cdot M = c' \cdot \underbrace{(N^{-1} \cdot [f]_B^c \cdot M)}$$

$$\Rightarrow c' [f]_{B'}^{c'} \quad \square$$

CONSIGLIO: meglio non usare le formule  
 invece: usare la def. di  $[\cdot]_B$   
 o  $[\cdot]_B^c$  e ragionare sulle domande.

Prop:  $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$  linear  
 $\mathcal{B}$   $\mathcal{C}$   $\mathcal{D}$  basi

$$\Rightarrow [g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$$

Dimo: So che:  $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$   
 $g \cdot \mathcal{C} = \mathcal{D} \cdot [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow (g \circ f) \cdot \mathcal{B} &= g \cdot (f \cdot \mathcal{B}) = g \cdot \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= \mathcal{D} \cdot [g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \\ &= \mathcal{D} \cdot \underbrace{[g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{D}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}}_{[g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}}} \end{aligned}$$



## Sistemi lineari:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Sistemi di  $m$  equazioni lineari nelle incognite  $x_1, \dots, x_n$  con coefficienti  $a_{ij}$  e termini noti  $b_i$ .

Scrittura matriciale:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ incognito}; \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = A \in \mathbb{M}_{m \times n}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$$

matrice dei coeff.

rettore dei termini noti :

$$A \cdot x = b$$

Oss: Vedendo  $A$  come  $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  si ha  
che il sistema ha soluz.  $\Leftrightarrow b \in \text{Im}(A)$  -

Auzi:  $\{\text{soluz. di } A \cdot x = b\} = A^{-1}(b)$

preimmagine (non inversa)

Oss: Se  $m = n$  e  $A$  è invertibile la soluz.  
di  $A \cdot x = b$  esiste unica ed è  $x = A^{-1} \cdot b$ .

(Pb: Come decidere se  $A$  è invertibile?  
Se sì, come trovare  $A^{-1}$ ?)

Def: Se  $f: V \rightarrow W$  è lineare chiamo  
rank di  $f$   
 $\text{rank}(f) = \dim(\text{Im} f)$

Se  $A$  è una matrice, chiamo  $\text{rank}(A)$   
il rango dell'applicazione associata -

Oss. Poiché le colonne di  $A$  generano  $\text{Im}(A)$  ho  
 $\text{rank}(A) = \dim(\text{spazio generato dalle colonne})$   
))

= massimo numero di colonne di  $A$  lin. indep.

IMPRECISO

= massimo numero di elementi di un insieme  
di colonne di  $A$  che costituiscono un insieme

di vettori linearmente indipendente

Teo (Rouché-Capelli): il sistema  $A \cdot x = b$   
ha soluzione se e solo se  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A, b)$

matrice del  
sistema  
incomplete

matrice  
completa

Dim: esiste soluz.

$\Leftrightarrow b \in \text{Im}(A)$

$\Leftrightarrow$  aggiungendo  $b$  a  $\text{Im}(A)$  la dim non sale

$$\Leftrightarrow \text{rank}(A) = \text{rank}(A, b) \quad \square$$

Chiamo omogeneo un sistema con  $b = 0$ ,  
cioè  $A \cdot x = 0$  - In tal caso

$$\{\text{soluz}\} = \{x : A \cdot x = 0\} = \text{Ker}(A)$$

è un sp. vett. di dim  $n - \text{rank}(A)$  -

Prop: la soluz. generale di un sistema non omogeneo è la somma di una soluz. particolare e della soluz. generale del sistema omogeneo associato.

Cioè: Se  $A \cdot x_0 = b$  allora

$$\{x : A \cdot x = b\} = \{x_0 + y : y \text{ t.c. } A \cdot y = 0\} -$$

Dimo:

$$A \cdot x = b \iff A \cdot x = A \cdot x_0$$

$$\iff A \cdot (x - x_0) = 0$$

$$\iff x - x_0 = y \text{ con } A \cdot y = 0$$

$$\iff x = x_0 + y \text{ con } A \cdot y = 0 \quad \square$$

Terminologia: un sistema di  $m$  equaz. in  $n$  incognite si dice

- sottodeterminato se  $m < n$
- quadrato se  $m = n$
- sovradeterminato se  $m > n$  -

Oss: un sistema omogeneo sottodet ha come  
soluz. un sp. vett. di dim  $\geq m - n$   
 $\Rightarrow$  infinite soluz ( $\infty^k$  con  $k \geq m - n$ ) -

Possibilità per  $\neq$  soluz.:

|                         | omogeneo        | non omogeneo            |
|-------------------------|-----------------|-------------------------|
| sottodet.               | sempre infinite | nessuna o infinite      |
| quadrato o<br>s overdet | una o infinite  | una, nessuna o infinite |

Come risolvere un sistema:

- riordinare le equazioni
- ricavare una variabile da un'eq. e sostituirla in un'altra

- Sostituire una equazione con la stessa più un multiplo di un'altra
- Sostituire un'equez. con un suo multiplo non nullo

$$\begin{cases} 3x - 5y = 7 \\ 2x + 9y = -1 \end{cases}$$

$$8 \cdot 1 + 5 \cdot 4 \quad \begin{cases} 37x = 58 \end{cases}$$

Q: Come decidere se esiste  $A^{-1}$  e trovarla?  
Come calcolare  $\text{rank}(A)$ ?

Qss:  $A \in M_{n \times n}$  è invertibile  
 $\Leftrightarrow$  è surgettiva come appl.  
 $\Leftrightarrow \text{rank}(A) = n$ .

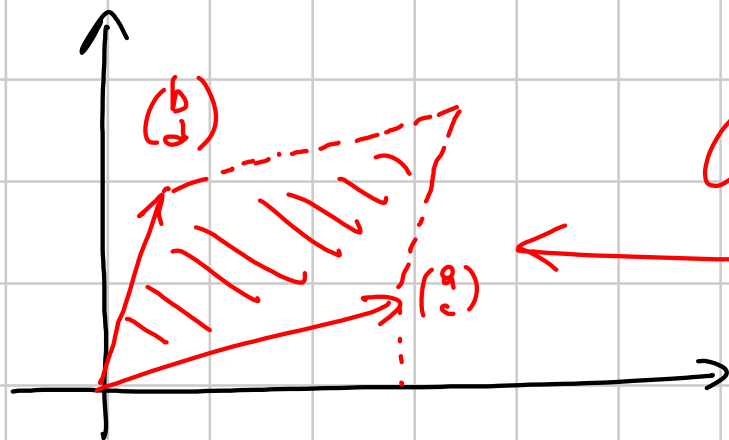
Le risposte sono basate sul determinante.

Per  $A \in M_{1 \times 1}$ ,  $A = (a)$ ; per  $\det(A) = a$

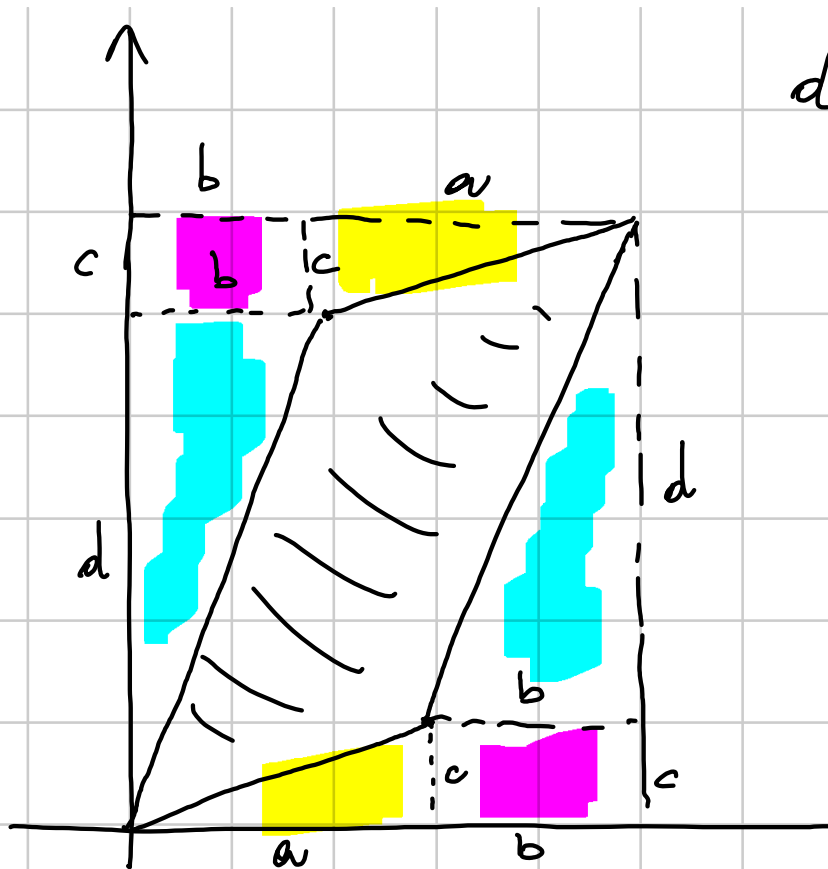
e ho  $A$  invertibile  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Per  $A \in M_{2 \times 2}$ ,  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

voglio un numero  $\det(A)$  che dice se esiste  $A^{-1}$ :  
 $A$  invertibile  $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$



Chiamo  $\det(A)$  l'area di



$$\det(A) = \text{area}(\text{parallelogram})$$

$$= (a+b) \cdot (c+d)$$

$$- 2 \cdot b \cdot c$$

$$- 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot c$$

$$- 2 \cdot \frac{1}{2} b \cdot d$$

$$= \cancel{a \cdot c} + a \cdot d + b \cdot c + \cancel{b \cdot d} \\ - 2 \cdot bc - \cancel{a \cdot c} - \cancel{b \cdot d}$$

$$= a \cdot d - b \cdot c$$

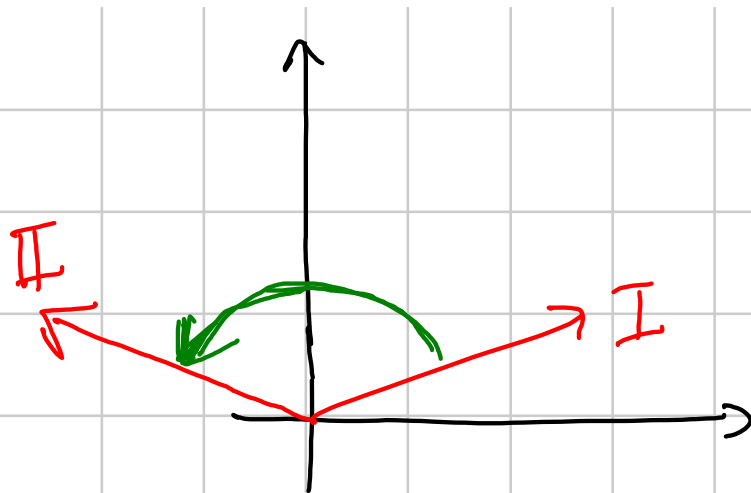
Oss:  $\begin{pmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$       $a \cdot d - b \cdot c = 5 - 14 = -9$

$\Rightarrow$  non è l'area ma è un'area con segno:  
il valore assoluto è l'area; il segno è

$A = (I, II)$  ;     se  $\det(A) = 0$ ,  $I$  e  $II$  sono  
proporzionali.

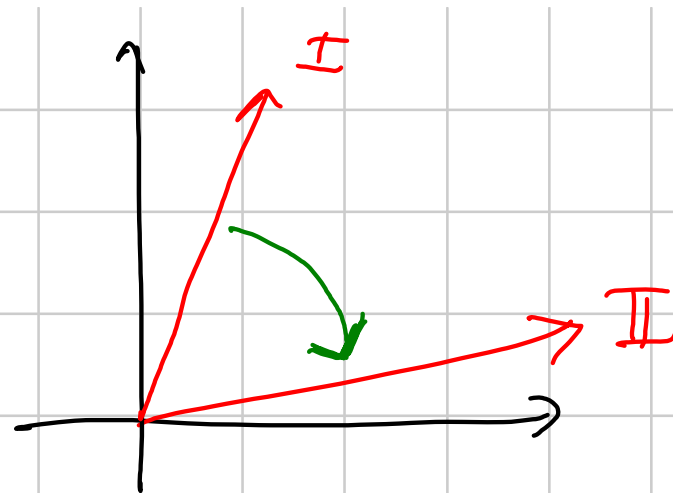
(segno non  
importante)

abbinamenti;



la rotaz. di meno di  $180^\circ$   
da I a II

antioraria  
 $\det(A) > 0$



oraria  
 $\det(A) < 0$

Esercizio 9/11/14.

(2)  $\dim V \leq \dim W$ .

•) Esistono  $f: V \rightarrow W$  iniettive.

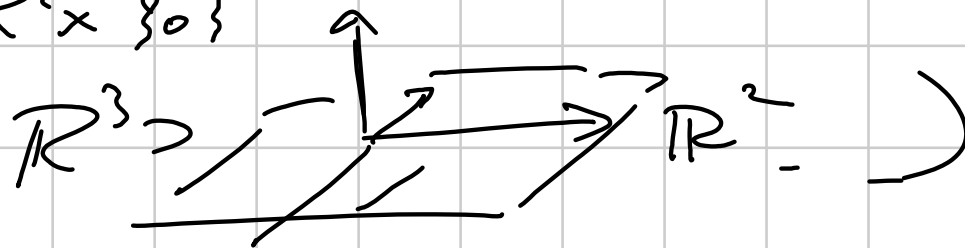
$V$  ha una base  $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$

$W$  ha una base  $\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$

$$m \leq n$$

Poniamo  $f(v_i) = w_i \quad i=1, \dots, m$

( Come si fa a vedere  $\mathbb{R}^2$  dentro  $\mathbb{R}^3$  :  
 come  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$



Se  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \text{Ker } f$  ho, applicando  $f$   
 $\lambda_1 w_1 + \dots + \lambda_n w_n = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$   
 $\Rightarrow$  Ho provato che  $\text{Ker } f = 0$  -

•) Data  $f: V \rightarrow W$  iniettiva esisto  $g: W \rightarrow V$   
 t.c.  $g \circ f = \text{id}_V$  -

Prendo una base  $v_1, \dots, v_m$  di  $V$  -

Allora  $f(v_1), \dots, f(v_m)$  sono lin. indipendenti  
(per injectività) -

Pongo  $w_1 = f(v_1), \dots, w_m = f(v_m)$  e li completo  
a una base  $w_1, \dots, w_n$  di  $W$  ( $n \geq m$ ) -

Definisco  $g$  sulla base  $w_1, \dots, w_n$  :

$$g(w_i) = \begin{cases} v_i & \text{per } i = 1, \dots, m \\ \text{a caso} & \text{per } i = m+1, \dots, n \end{cases} -$$

$$(g \circ f)(v_i) = g(w_i) = v_i$$

$i \leq n$

$\Rightarrow g \circ f$  è l'identità sulle base  $v_1, \dots, v_n$  di  $V$   
 $\Rightarrow$  è l'identità.

③ Trovare basi di  $\text{Ker}(A)$  e  $\text{Im}(A)$ .

(a)  $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 3x - 2y + 8z = 0 \\ 4x + y + 6z = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = -4x - 6z \\ 11x + 20z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Base Ker}(A) : \begin{pmatrix} 2 \\ -14 \\ -11 \end{pmatrix}$$

$$\text{Base L. Inv}(A) : \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}$$

✓
✓
✗

$$(\text{Inv}(A) = \mathbb{R}^2; \text{ posso anche usare } \mathbb{E}^{(2)}.)$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 5y - z = 0 \\ 3x + y + 5z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2y \\ y - z = 0 \\ -5y + 5z = 0 \end{cases}$$

Ken A: base  $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\text{Im}(A) :$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

✓                  ✓

~~$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$~~

$2 \cdot \text{I} - \text{I}$

$= -2 \cdot \text{I} + \text{II} + \text{IV} = 0$

④ Transform  $\begin{bmatrix} p \\ f \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

$$(a) f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$$

$$(f = f_A, A = [f]_{\mathcal{E}^{(2)}}^{\mathcal{E}^{(3)}} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix}.)$$

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} = -47 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 36 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -20 \end{pmatrix} = -67 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 45 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 32 \end{pmatrix} = -68 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} - 44 \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -47 & -67 & -68 \\ 36 & 45 & -44 \end{pmatrix} -$$

$$(c) \quad f: \mathcal{S}_2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(A) = \begin{pmatrix} a_{11} + 2a_{12} - a_{22} \\ 5a_{11} - 3a_{21} + a_{22} \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \right) \quad \mathcal{C} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 10 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ -12 \end{pmatrix} = 34 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 25 \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} : \\ : \end{pmatrix} = \dots \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 13 & 34 & \vdots \\ -10 & 25 & \vdots \end{pmatrix}$$

$$(e) \quad f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \{y \in \mathbb{R}^3 : y_1 + y_2 + y_3 = 0\}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ -2x_1 - x_2 \end{pmatrix}$$

(La formula di  $f$  è certamente un  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  lineare : devo vedere tutti i punti dell'immagine soddisfanno  $y_1 + y_2 + y_3 = 0$  :

$$(3x_1 - x_2) + (-x_1 + 2x_2) + (-2x_1 - x_2) = 0$$

$$B = \left( \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad C = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \underline{OK}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ -17 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{117}{13} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} - \frac{52}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{34}{13} \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} + \frac{9}{13} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_B^C = \frac{1}{13} \begin{pmatrix} 117 & -34 \\ -52 & 9 \end{pmatrix}$$