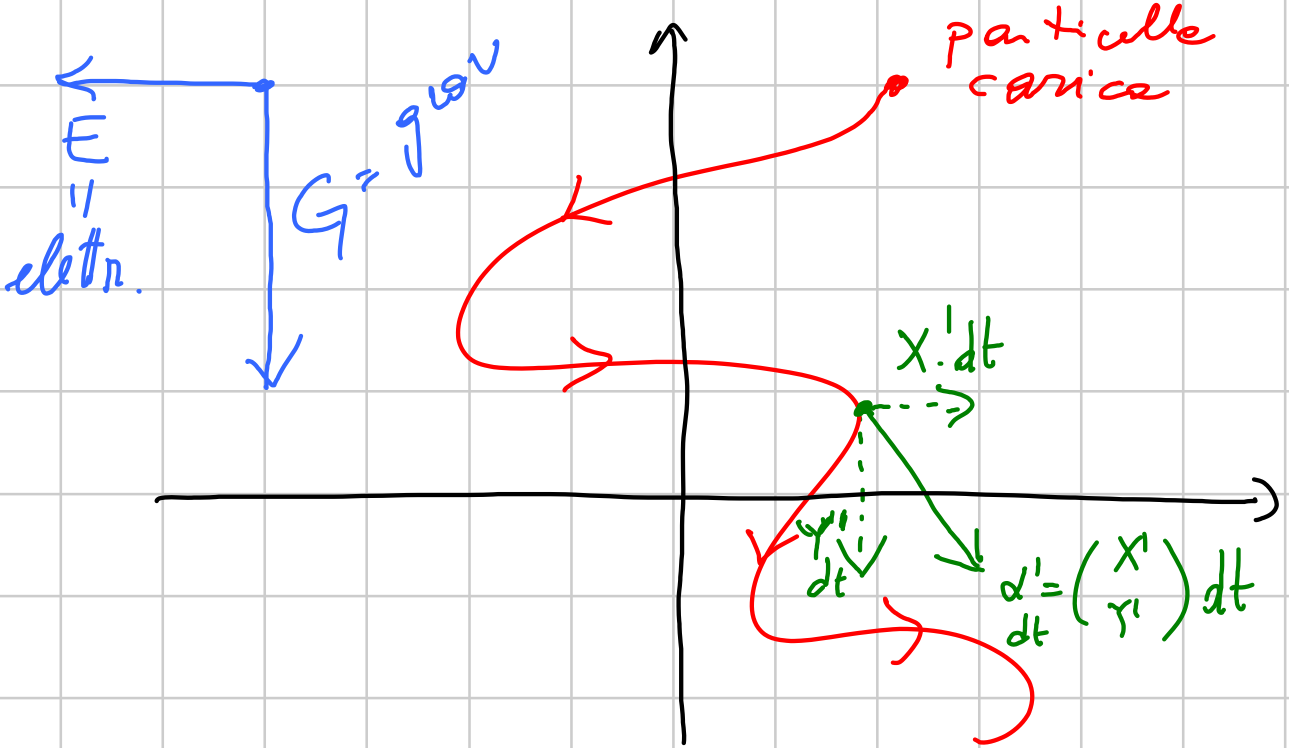
Geometria 16/5/14

1-forme

$$\int_\alpha f = \int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \|\alpha'(t)\| dt \quad :$$

"costo" di α dipende
- punto
- intensità dello spostamento

Invece: "costo" può dipendere da direzione spostamento:



Se E è orizz. con intensità $f(x,y)$ in (x,y)

G verticale con intensità $g(x,y)$ in (x,y)

→ lavoro totale è

$$\int_a^b f(\alpha(t)) \cdot \underbrace{x'(t)\,dt}_{\substack{\text{spost.}\\ \text{inf. in}\\ \text{direz. } x\\ \| \\ dx}} + \int_a^b g(\alpha(t)) \cdot \underbrace{y'(t)\,dt}_{\substack{\text{spost.}\\ \text{inf. in}\\ \text{direz. } y\\ \| \\ dy}}$$

Def: Se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ chiamo 1-forma su Ω un oggetto del tipo

$\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$

$\left(\omega(x,y) = f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy \right)$. Se

$\alpha : [a,b] \to \Omega$ è curva regolare (a tratti):

definisco

$$\int_\alpha \omega = \int_\alpha f\,dx + g\,dy = \int_a^b \left(f(\alpha(t)) \cdot X'(t) + g(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \right) dt$$

<u>Esempio</u>: $\omega(x,y) = 2x^2y\,dx - 5xy^3\,dy$

$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} t - 3t^2 \\ 6t + t^3 \end{pmatrix} \quad t \in [0,1].$$

$$\int_\alpha \omega = \int_0^1 \Big(2\cdot(t-3t^2)^2 (6t+t^3)\cdot(1-6t) +$$

$$-5(t-3t^2)(6t+t^3)^3\cdot(6+3t^2)\Big)\,dt$$

$$= \text{conti} \ldots$$

Oss: ha senso anche in $\mathbb{R}^n$: $n=3$

$$\omega = f\,dx + g\,dy + h\,dz \qquad \alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \Big(f(\alpha(t))\cdot X'(t) + g(\alpha(t))\cdot Y'(t) + h(\alpha(t))\cdot Z'(t) \Big)\,dt$$

Prop: data $\omega = f\,dx + g\,dy$, α curva, $\beta = \alpha \circ \tau$ si ha

$$\int_\beta \omega = \begin{cases} \int_\alpha \omega & \text{se } \tau \text{ preserva orientazione} \\ -\int_\alpha \omega & \text{se } \tau \text{ inverte} \end{cases}$$

Dimo: se $\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ $\quad \xi = X \circ \tau$, $\eta = Y \circ \tau$

$$\int_\beta \omega = \int_c^d \left(f(\beta(s))\,\xi'(s) + g(\beta(s)) \cdot \eta'(s) \right) ds$$

$$= \int_c^d \Big(f(\alpha(\tau(s))) \cdot X'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) + g(\alpha(\tau(s))) \cdot Y'(\tau(s)) \cdot \tau'(s) \Big) \, ds$$

cambio variabile

$$t = \tau(s) \qquad dt = |\tau'(s)| \, ds$$

a seconda del segno (costante di τ') trovo

$$\pm \int_a^b \Big(f(\alpha(t)) X'(t) + g(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \Big) \, dt = \pm \int_\alpha \omega .$$

Def: se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è aperto e $U : \Omega \to \mathbb{R}$ le associo la 1-forma

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \qquad \text{differenziale di } U.$$

Es: $U(x,y) = x - \log(1+xy^2) + \sin(y)$

$$dU(x,y) = \left(1 - \frac{y^2}{1+xy^2}\right) dx + \left(-\frac{2xy}{1+xy^2} + \cos(y)\right) dy.$$

Prop: $\displaystyle\int_\alpha dU = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$.

Dim: $\displaystyle\int_\alpha dU = \int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}(X(t),Y(t)) \cdot X'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(X(t),Y(t)) \cdot Y'(t) \right) dt$

$\displaystyle = \int_a^b \left(\frac{d}{dt} U(\alpha(t)) \right) dt = U(\alpha(t)) \Big|_{t=a}^{t=b}$

$= U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$. $\blacksquare$

Def: se una 1-forma ω ammette una funzione U t.c. $\omega = dU$ allora diciamo che ω è esatta e che U è un potenziale per ω.

In fisica: se ω rappresenta un campo di forze; "ω esatta" = "ω ammette un potenziale"

= "ω è campo di forze conservativo".

La Prop. precedente dice:

se ω è un campo conservativo con potenziale U

allora

il lavoro fatto lungo un percorso è
la differenza di potenziale tra gli estremi
(non dipende dal percorso).

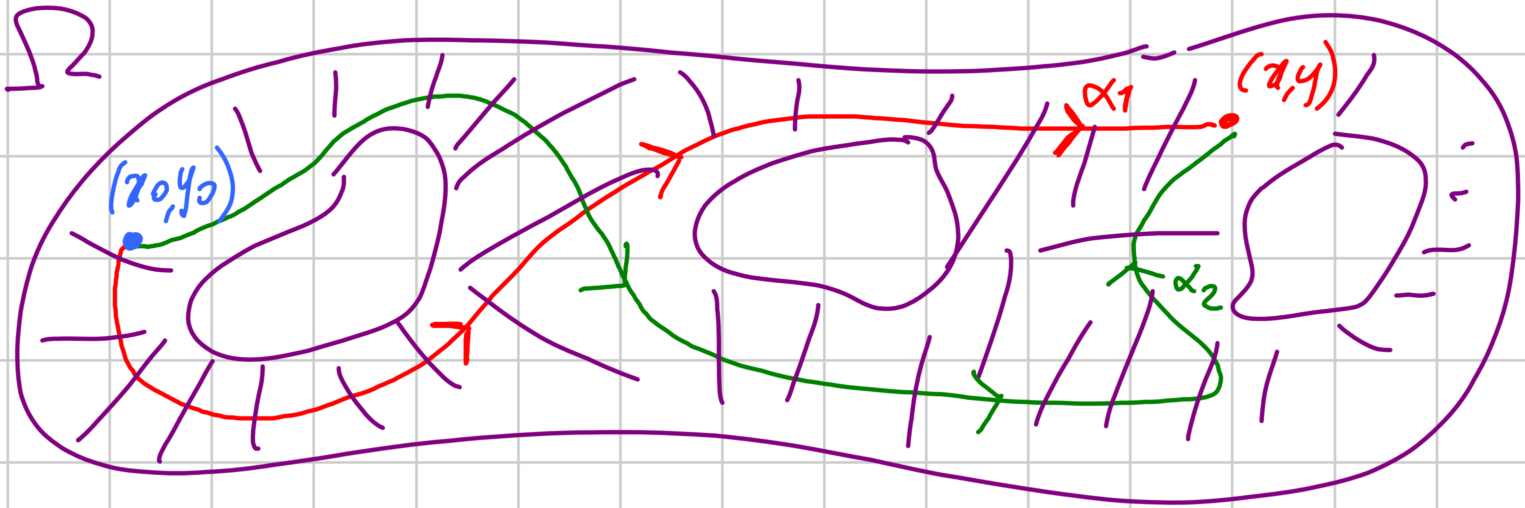
Q: quali forme sono esatte?

Prop: ω è esatta (ammette potenziale)
se e soltanto se per ogni curva α
$\int_\alpha \omega$ dipende solo dagli estremi di α.

Dim: ω esatta $\Rightarrow \omega = dU \Rightarrow \int_\alpha \omega = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$
$\Rightarrow$ dipende solo da
estremi di α.

Supponiamo ora che $\forall \alpha$ $\int_\alpha \omega$ dipende solo da estremi.

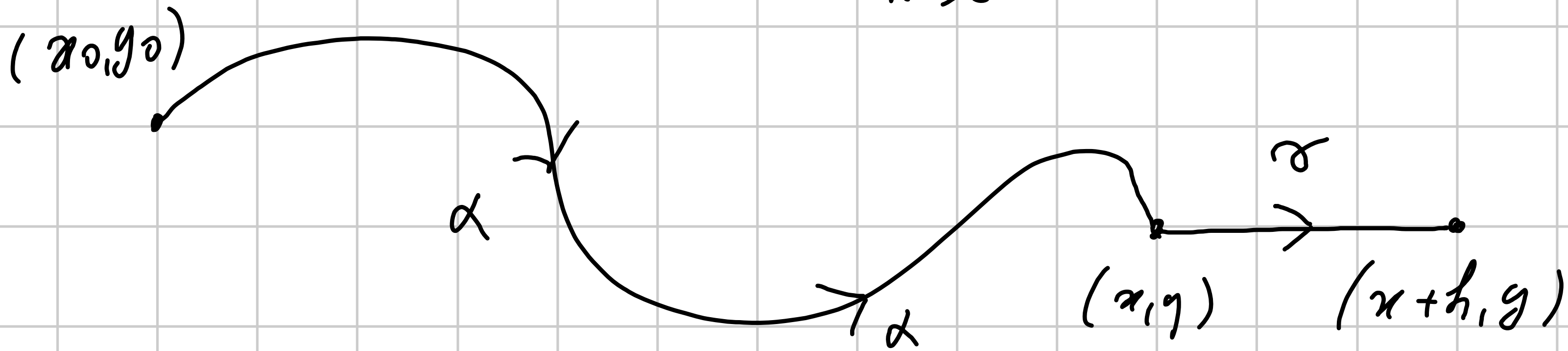
Vogliamo definire un potenziale U : fissiamo $(x_0,y_0) \in \Omega$ e per ogni $(x,y) \in \Omega$ definiamo $U(x,y) = \int_\alpha \omega$ dove α è una qualsiasi curva che unisce (x_0,y_0) a (x,y) :



Grazie all'ipotesi che $\int \omega$ dipende solo da estremi ho che U è ben. def. α

Resta da vedere che $dU = \omega$, cioè che se $\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$ ho $\frac{\partial U}{\partial x} = f$, $\frac{\partial U}{\partial y} = g$.

Verifico che $\frac{\partial U}{\partial x} = f$ cioè $\lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left| U(x+h,y) - U(x,y) \right| = f(x,y)$.



$$\frac{1}{h}\left(U(x+h,y) - U(x,y)\right) = \frac{1}{h}\left(\int_{\alpha\cup\gamma}\omega - \int_{\alpha}\omega\right)$$

$$= \frac{1}{h}\left(\int_{\alpha}\omega + \int_{\gamma}\omega - \int_{\alpha}\omega\right) = \frac{1}{h}\int_{\gamma}\omega = \ldots$$

$$\gamma(t) = (x+t, y) \qquad 0 \le t \le h$$

$$\ldots = \frac{1}{h}\int_0^h \left(f(x+t,y)\cdot 1 + g(x+t,y)\cdot 0\right) dt$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h f(x+t, y)\,dt = \frac{d}{dh} \int_0^h f(x+t,y)\,dt \Big|_{h=0}$$

$$= f(x,y) \,. \qquad \blacksquare$$

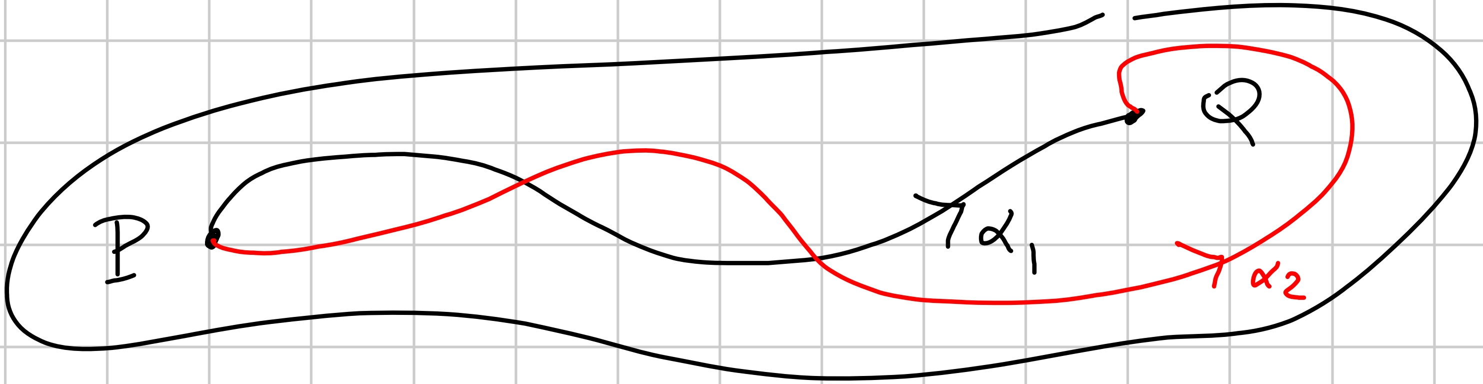
<u>Cor</u>: "campo conservativo $\Longleftrightarrow$ circuitazione nulla (lavoro nullo sui percorsi chiusi)"

ω è esatta $\Longleftrightarrow$ $\int_\beta \omega = 0 \quad \forall \beta$ curva chiusa.

Dim: ω esatta $\Rightarrow \omega = dU \Rightarrow \int_\beta \omega = U(\beta(b)) - U(\beta(a))$

$= 0$ _

$\int_\beta \omega = 0 \ \forall \beta$ chiusa $\Rightarrow$



$\Rightarrow \alpha_1 \cup (-\alpha_2)$ è curva chiusa

$$\Longrightarrow \int_{\alpha_1} \omega + \int_{-\alpha_2} \omega = 0 \Longrightarrow \int_{\alpha_1} \omega - \int_{\alpha_2} \omega = 0$$

$$\Longrightarrow \int_{\alpha_1} \omega = \int_{\alpha_2} \omega \Longrightarrow \int_{\alpha} \omega \text{ dipende solo dagli estremi di } \alpha$$

$\Longrightarrow$ (Prop. prec.) ω è esatta. $\blacksquare$