Geometria 13/3/14

Esercizi del foglio dell'11/3/14.

(1)

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

(det. di Vandermonde)

Sol 1. Per induzione (per $n \geq 2$):

$n=2$ $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \lambda_2 - \lambda_1$ ✓

$n=3$ $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 \end{pmatrix} = \lambda_2 \lambda_3^2 + \lambda_3 \lambda_1^2 + \lambda_1 \lambda_2^2$

$- \lambda_2 \lambda_1^2 - \lambda_1 \lambda_3^2 - \lambda_3 \lambda_2^2$

$$\prod_{1 \leq i < j \leq 3} (\lambda_j - \lambda_i) = (\lambda_2 - \lambda_1) \cdot (\lambda_3 - \lambda_1) \cdot (\lambda_3 - \lambda_2)$$

= 8 termini di cui i 6 di sopra

+2 che si cancellano

Passo induttivo:

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} =$$

Ottengo zeri sulla I colonna: sostituisco ogni riga con lei $-\lambda_1$ volte la precedente

$$= \det\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2-\lambda_1 & \cdots & \lambda_n-\lambda_1 \\ 0 & \lambda_2^2-\lambda_2\lambda_1 & \cdots & \lambda_n^2-\lambda_n\lambda_1 \\ \vdots \\ 0 & \lambda_2^{n-1}-\lambda_2^{n-2}\lambda_1 & \cdots & \lambda_n^{n-1}-\lambda_n^{n-2}\lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \lambda_2 - \lambda_1 & \cdots & \\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2 & & \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & (\lambda_2-\lambda_1)\lambda_2^{n-1} & & \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{(\lambda_2-\lambda_1)(\lambda_3-\lambda_1)\cdots(\lambda_n-\lambda_1)}\ \underbrace{\det \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & & \\ \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{det di Vandermonde } (n-1)\times(n-1)}$$

$$= \prod_{j=2}^{n} (\lambda_j - \lambda_1) \cdot \prod_{2 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

$$= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

<u>Sol 2</u>

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \cdots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & \cdots & \lambda_n^2 \\ \vdots & & & & \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i)$$

Notiamo (1) entrambi i membri sono polinomi in $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

(2) ogni monomio del membro sx ha grado

$$0+1+2+\dots+n-1 = \frac{n(n-1)}{2}$$

$\Rightarrow$ ha grado $\frac{n(n-1)}{2}$

(3) il membro dx ha grado $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

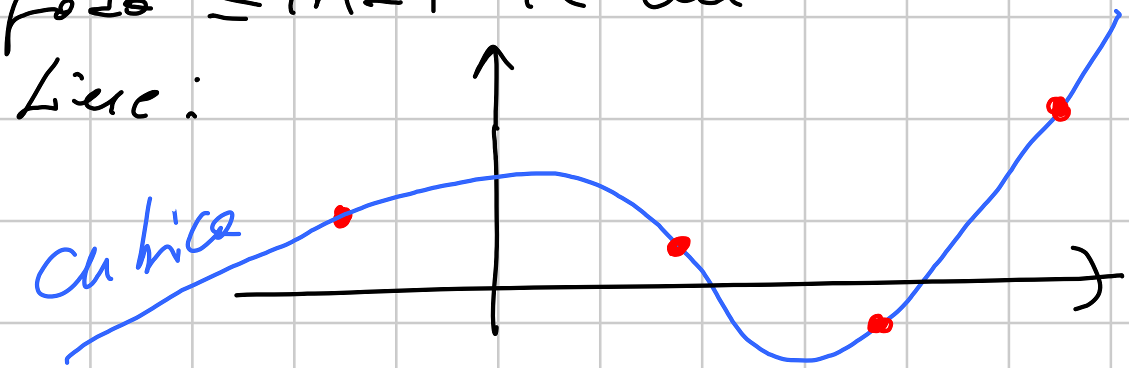
(4) il membro sinistro si annulla se $\lambda_i = \lambda_j$ per qualche $i<j$ (due colonne uguali)

$\Rightarrow$ (Ruffini) è divisibile per $\lambda_j - \lambda_i$

$\Rightarrow$ il membro sx è divisibile per il membro dx

(5) Ciò comporta che il membro sx è k volte ($k \in \mathbb{R}$) il dx; resta da vedere che $k=1$ (facile esaminando un coeff qualsiasi) _

Applicazione: dati nel piano n punti con ascisse distinte esiste uno e un solo polinomio di grado $\leq n-1$ il cui grafico li contiene:



Infatti se i punti sono $(x_1,y_1),\dots,(x_n,y_n)$ cerco $a_0,a_1,\dots,a_{n-1}$ t.c. il grafico di $a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{n-1}x^{n-1}$ li contenga:

$$\begin{cases} a_0+a_1x_1+\dots+a_{n-1}x_1^{n-1}=y_1 \\ \vdots \\ a_0+a_1x_n+\dots+a_{n-1}x_n^{n-1}=y_n \end{cases}$$

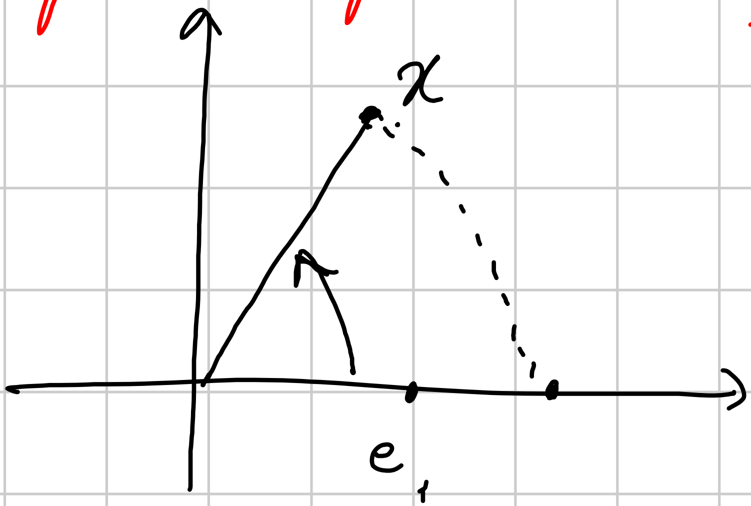
matrice: $\begin{pmatrix} 1 & x_1 & \dots & x_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$

(Vandermonde trasposta) ha det

$$\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\neq 0.$$

(Interpolazione polinomiale)

3

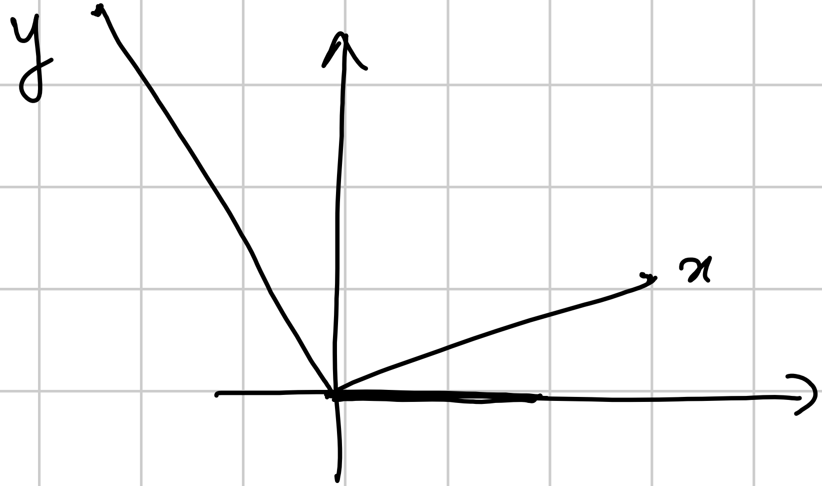


Cerchiamo λ, ϑ t.c.

$$\lambda \cdot rot_{\vartheta}(x) = e_1$$

$$\cos\vartheta = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2}}$$

$$\sin\vartheta = -\frac{x_2}{\sqrt{}}$$



$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}$$

$$y \perp x \iff \lambda \cdot \mathrm{rot}_v(y) \perp \lambda \cdot \mathrm{rot}_v(x)$$

$$\lambda \cdot \mathrm{rot}_v(y) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ -x_2 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda \cdot \mathrm{rot}_v(x) = e_1$$

$\iff$ ↑ ha I componente nulla $\iff x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$.

(4) $C^0([0,1], \mathbb{R}) \qquad \langle f | g \rangle = \int_0^1 f(t) \cdot g(t) \, dt$

$$S(t) = \sin(2\pi t), \quad C(t) = \cos(2\pi t)$$

$$\langle S | C \rangle = \int_0^1 \sin(2\pi t) \cdot \cos(2\pi t) \, dt$$

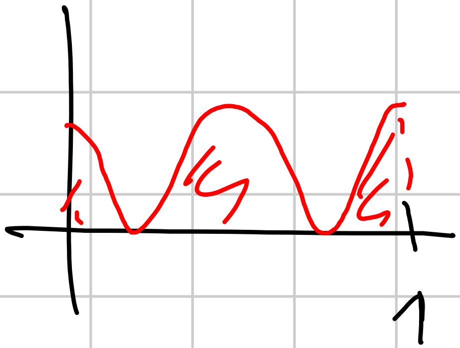
$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(4\pi t) \, dt = \frac{1}{8\pi} \cos(4\pi t) \Big|_{t=0}^{t=1} = 0$$

$$\|S\|^2 = \int_0^1 \sin^2(2\pi t)\,dt$$

$$\|C\|^2 = \int_0^1 \cos^2(2\pi t)\,dt$$

$\|S\|^2 = \|C\|^2$

(le integrande sono periodiche di periodo $1/2$ e traslate una dell'altra di $1/4$)



Quindi $\|S\|^2 + \|C\|^2 = 1 \implies \|S\| = \|C\| = 1/\sqrt{2}$

(6) Dire se l'applicazione data è bil/simm/def pos:

(a) su $\mathbb{R}^2$ $\quad f(x,y) = 7x_1y_2 + 8y_1y_2 - 5x_2y_1$

No bil: ad es $\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = 8 \neq 0$

(il termine $8y_1y_2$ non è di grado 1 né in x né in y).

(b) $f(x,y) = -3x_1y_1 + 2x_1y_2 + 8x_2y_1 + 7x_2y_2$

Bilineare. Non simmetrica (i coeff. di

x_1y_2 e x_2y_1 sono diversi) :

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=2$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=8$$

(viene dalla matrice $\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 8 & 7\end{pmatrix}$)

(c) $f(x,y) = 7x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 - 4x_2y_2$

Bil, simm, (viene dalla matrice $\begin{pmatrix}7 & -3\\ -3 & -4\end{pmatrix}$)

non è def pos : $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = -4 < 0$.

(d) $f(x,y) = 3x_1y_1 + 4x_1y_2 + 4x_2y_1 + 5x_2y_2$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

bil. simm.

non def. pos ($\det < 0$)

$f(x,x) = 3x_1^2 + 8x_1x_2 + 5x_2^2$ $\quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = 0$

Provate a trovare x con $f(x,x) < 0$

(e) $4x_1y_1 - 3x_1y_2 - 3x_2y_1 + 5x_2y_2$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

bil., simm, def pos $(4>0,\ \det>0)$; oppure:

$$f(x,x) = 4x_1^2 - 6x_1x_2 + 5x_2^2 = x_1^2 + 3(x_1 - x_2)^2 + 2x_2^2$$

sempre positivo tranne se $x = 0$

(f) non simm.

(g) $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ $\quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ bil. simm.

Non def. pos: ad es $f(x,x) < 0$ per $x = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

(h) $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(x|x)_A = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3$$
$$= (x_1 + x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2$$

Sempre positivo tranne x $\quad \begin{array}{l} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{array}$ $\quad$ cioè $x = 0$

$\Rightarrow$ def. pos.

(7) $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ prod. scal?

(a) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ No (det < 0)

(b) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ Sì

(c) $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Non simm

(d) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ No (v. a)

(e) $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & -\sqrt[3]{17} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$ No (non def > 0)

(7) $\begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 2-k & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{pmatrix}$

def. pos. se

$k>0$, $2-k>0$, $k^2>0$

cioè $0<k<2$

(8) Sono prod. scal?

(a) $M_{2\times 2} \times M_{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}$ $\quad (A,B) \longmapsto \sum_{i,j=1}^{2} \left(1+(-1)^{i+j}\right)(A\cdot B)_{ij}$

$$(A,B) \longmapsto 5\cdot(A\cdot B)_{11} - 7\left((A\cdot B)_{12} + (A\cdot B)_{21}\right) + 17(A\cdot B)_{22}$$

$$= 5\left(a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21}\right) - 7\left(a_{11}b_{12} + a_{12}b_{21} + a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21}\right) + 17\cdot\left(a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22}\right)$$

coeff diversi

$\Longrightarrow$ non simm.

(b) $\mathbb{R}_{\leq 2}[t] \times \mathbb{R}_{\leq}[t] \to \mathbb{R}$

$(p(t), q(t)) \longmapsto p(1) \cdot q'(-1) + q(1) \cdot p'(-1)$

Bilineare, simmetrica;

$(p(t), p(t)) \longmapsto 2\, p(1) \cdot p'(-1)$

è negativo per $p(t) = -t+2$; no def. pos.

9 $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è prod. scal?

(a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & \sqrt{\pi} \\ 5 & 3 & -1781 \\ \sqrt{\pi} & -1781 & e \end{pmatrix}$ non def. pos

(neg. su $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$)

(b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} > 0$

$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} > 0$

$\det \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} > 0$

$$\langle x|x\rangle_A = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$$

$$ \quad \underline{4+1} \quad \underline{1+2}$$

$$= (x_1+2x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + 2x_3^2$$

Sempre > 0 tranne se $\begin{array}{l} x_1+2x_2=0 \\ x_2-x_3=0 \\ x_3=0 \end{array}$ cioè $x=0$.

$\Longrightarrow$ È def. pos.

(c) Non simm.

(d) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} > 0$, $\det\begin{pmatrix} 7 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} > 0$, $\det\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} > 0$

$$\langle x | x \rangle_A = x_1^2 + 5x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$

Se cerchiamo x per cui sia negativo:

x_1, x_2 discordi
x_1, x_3 discordi   ad es $+, -, -$
x_2, x_3 concordi

Provo $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $1 + 5 + 3 - 4 - 2 - 2 = 1 > 0$

Non è andata: posso aumentare x_1 (perché

x_1^2 pesa meno di x_2^2 e x_3^2) :

provo con $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$: $4+5+3-8-4-2=-2<0$

Non def. pos.

(e) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ det 2×2 : >0 >0 >0

$$x_1^2+5x_2^2+2x_3^2-4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$$

Se le voglio negative prendo:

x_1, x_2 concordi, $x_1 x_3$ discordi, $x_2 x_3$ discordi

ad es $+, +, -$

inoltre prendo x_1 più grande (x_1^2 pesa meno)

Provo: $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $4+5+2-8-4-6<0$

Non def. pos.

(7) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -2 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Osservo che $\det = 0$ ($\mathrm{I}^a + \mathrm{II}^a = \mathrm{III}^a$)

Se $A \cdot x = 0$ allora $\langle x|x\rangle_A = {}^t x \cdot A \cdot x = 0$

$\Rightarrow$ non def. pos.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(g) $\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -3 & -2 & 11 \end{pmatrix}$ diag. princ. > 0

det 2×2 > 0 > 0 > 0 ?

$$5x_1^2 + 3x_2^2 + 11x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 - 4x_2x_3$$

$$= (2x_1 - x_2)^2 + (x_1 - 3x_3)^2 + 2(x_2 - x_3)^2$$

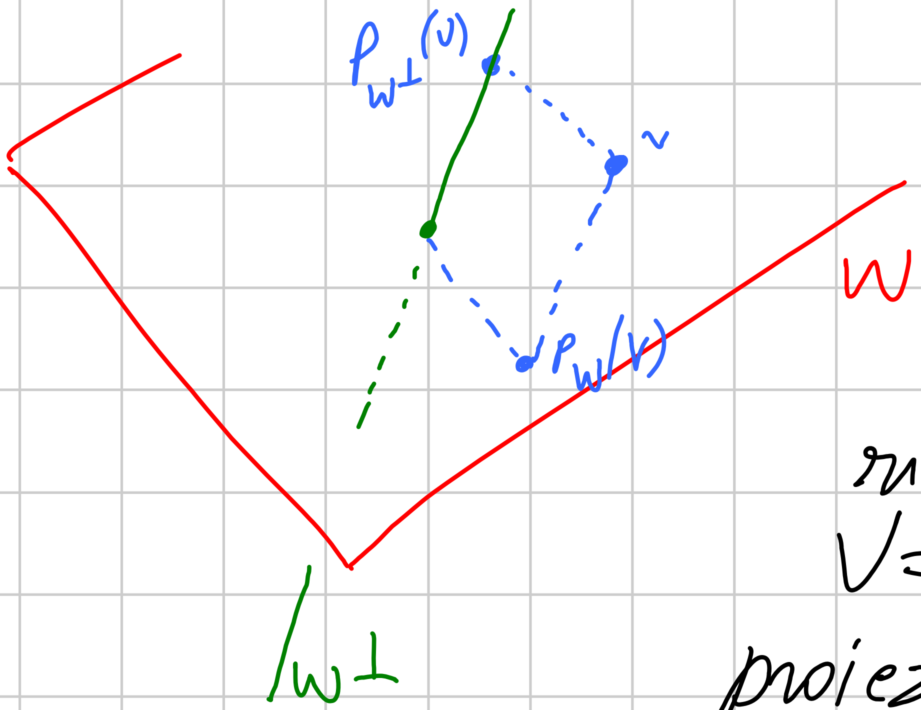
$\Longrightarrow$ sempre > 0 tranne x $\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ x_1 - 3x_3 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

cioè $x = 0$

$\Longrightarrow$ è def. pos.

V sp. vett. su $\mathbb{R}$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle$, $\dim_{\mathbb{R}} V < +\infty$.

Visto : $W \subset V$ stsp $\Longrightarrow V = W \oplus W^{\perp}$



$\Rightarrow$ a W sono associate le proiezioni rispetto alla decomposizione $V = W \oplus W^\perp$ dette proiezioni ortogonali p_W e $p_{W^\perp}$ —

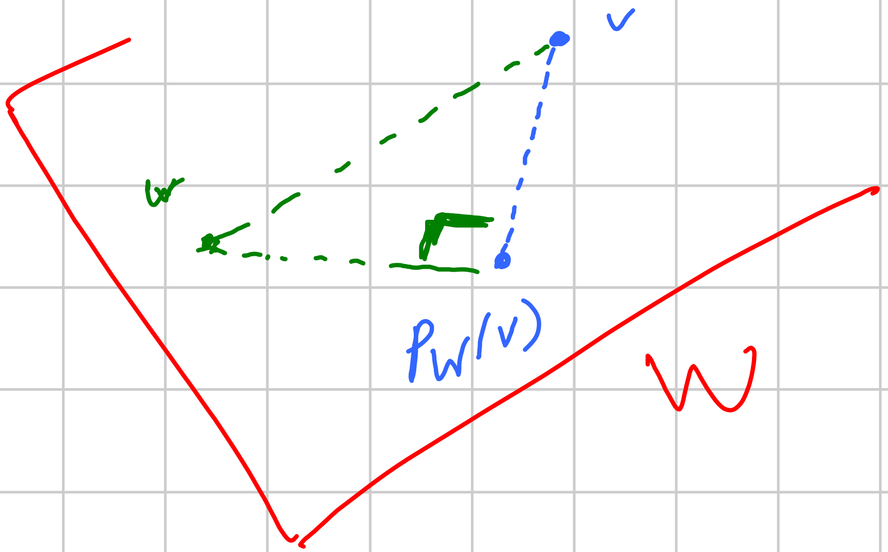
(Oss: $W^\perp$ è determinato da W $\Rightarrow$ p_W dipende solo da W)

<u>Teorema</u>: Se $w_1, \dots, w_K$ è una base ortogonale di W allora

$$P_W(v) = \sum_{j=1}^{K} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j .$$

Inoltre: $P_W(v)$ è il punto di W avente la minima distanza da v.

Infine: $$\sum_{j=1}^{K} \frac{|\langle v | w_j \rangle|^2}{\|w_j\|^2} \leq \|v\|^2$$ (disug. di Bessel).



Dim: Posso completare $w_1, \dots, w_k$ a base ortog. $w_1, \dots, w_n$ di V:

$$v = \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} w_j + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2} \cdot w_j$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in W} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\in W^\perp}$$

$\Rightarrow$ ok ; Bessel:

$$\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{k} \frac{|\langle v|w_j\rangle|^2}{\|w_j\|^{\cancel{4}\,2}} \cancel{\cdot \|w_j\|^2} + \underbrace{\sum_{j=k+1}^{m} \cdots}_{\geq 0}$$

$\Rightarrow$ ok.

Devo vedere che al variare di $a_1, \dots, a_k$ il punto $a_1 w_1 + \dots + a_k w_k$ è più vicino a v quando $a_j = \langle v | w_j \rangle / \|w_j\|^2$: cioè che

che il minimo della funzione

$f(a_1, \dots, a_k)$

$$= d(a_1 w_1 + \dots + a_k w_k, v)^2 = \|v - (a_1 w_1 + \dots + a_k w_k)\|^2$$

si ha per $a_j = \dfrac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2}$ -

Chiaro: $f(a_1, \dots, a_k)$ è molto positiva per $\|(a_1, \dots, a_k)\|$ molto grande

$\Rightarrow$ Se provo che l'unico punto in cui si annullano le derivate parziali è quello con $a_j = \langle v | w_j \rangle / \|w_j\|^2$ ho la condizione:

$$f(a_1, \dots, a_k) = \|v\|^2 - \sum_{i=1}^{k} 2 a_i \langle v | w_i \rangle + \sum_{i=1}^{k} a_i^2 \cdot \|w_i\|^2$$

(dipende dal fatto che $w_1 \dots w_k$ sono ortogonali)

$$\frac{\partial f}{\partial a_j} = 0 \implies -2\langle v | w_j \rangle + 2a_j \cdot \|w_j\|^2 = 0$$

$$\implies a_j = \frac{\langle v | w_j \rangle}{\|w_j\|^2}. \qquad \blacksquare$$