Geometria 3/4/14

Coniche a meno di isometrie:

parabola : $y = ax^2$

ellisse : $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$

iperbole : $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$

Se le vediamo a meno di trasf. affini
(cioè consentiamo anche cambi di unità

di misura sugli assi) restano:

parabola $\quad y = x^2 \quad (Y = y/a)$

ellisse $\quad x^2 + y^2 = 1 \quad (X = x/a,\ Y = y/b)$

iperbole $\quad x^2 - y^2 = 1 \quad ($ " $)$

<u>Oss</u>: le coniche sono sottoinsiemi di $\mathbb{R}^2$ definiti da equaz. polinomiali di II grado.

<u>Pb</u>: classificare a meno di trasf. affini i luoghi in $\mathbb{R}^n$

definiti da equaz. polinomiali di II grado.

— o —

Eq. poli. II grado in $x \in \mathbb{R}^n$:

$$\overbrace{\sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2 + \underbrace{\sum_{i<j} 2a_{ij}x_i x_j}_{\sum_{i\neq j} a_{ij}x_i x_j}}^{\text{grado 2}} + \overbrace{\underbrace{\sum_{i=1}^{n} 2a_{i,n+1}x_i}_{{}^t l\cdot x + {}^t x \cdot l}}^{\text{grado 1}} + \overbrace{\underbrace{a_{n+1,n+1}}_{c}}^{\text{grado 0}} = 0$$

ponendo $a_{ij} = a_{ji}$

uguali tra loro

$$\overbrace{\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j}^{\text{per } i>j}$$

$$\|$$

$${}^t x \cdot Q \cdot x$$

dove $Q = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$

simmetrica

dove

$$l = \begin{pmatrix} a_{1,n+1} \\ \vdots \\ a_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\underbrace{{}^t x \cdot Q \cdot x}_{\text{parte quadratica}} + \underbrace{{}^t \ell \cdot x + {}^t x \cdot \ell}_{\text{parte lineare}} + \underbrace{c}_{\text{termine noto}}}_{} = 0$$

$${}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$1 \times (n+1) \qquad (n+1)/(n+1) \qquad (n+1) \times 1$

dove $A = \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1\,n+1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1,n+1} & \cdots & a_{n+1,n+1} \end{pmatrix}$

simmetrica.

<u>Morale</u>: ogni equaz. di II grado in $x \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{con } A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R}) $$

simmetrica

<u>Es</u>: $x \in \mathbb{R}^3$ $\quad 7x_1^2 + 5x_2^2 - 8x_3^2 + 2x_1x_2 + 3x_1x_3 - 9x_2x_3 + 14x_1 - 11x_2 - 4x_2 + \sqrt{2} = 0$.

$$ {}^t\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3/2 & 7 \\ 1 & 5 & -9/2 & -11/2 \\ 3/2 & -9/2 & -8 & -2 \\ 7 & -11/2 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 $$

<u>Attenzione</u>: per ogni $B \in M_{(n+1)\times(n+1)}$

l'equaz $\,{}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

è poli. di II grado, ma se B

non è simm. non è scritta come sopra.

Rimedio $\quad {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}\left({}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot B \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot {}^tB \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \Big(\underbrace{\tfrac{1}{2}\left(B + {}^tB\right)}_{A} \Big) \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 .$$

Scopo: classificare a meno di trasf. affini
i luoghi del tipo

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$$

con $A \in M_{(n+1)\times(n+1)}$ simmetrica e

$\det(A) \neq 0$ (non degenere).

Trasf. affine: del tipo

$$x \longmapsto x' = M \cdot x + v \qquad M \in M_{n \times n}(\mathbb{R}), \quad v \in \mathbb{R}^n$$

con M invertibile

$(\det M \neq 0)$

Notiamo: $x' = M \cdot x + v \iff \begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$

dunque la trasf. affine è rappresentata da

$$T = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)}$$ identificando $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}^n \times \{1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$.

Effetto del cambio di coordinate di matrice $T = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sull'equazione

$$^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} Q & l \\ ^t l & 1 \end{pmatrix}$$

$$\bar{i} : \quad ^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \underbrace{^tT \cdot A \cdot T}_{} \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

matrice della nuova equazione una volta eseguito il cambio di variabili affine $x' = M \cdot x + v$ con $T = \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Inoltre: $A' = {}^tT \cdot A \cdot T$

$$\begin{pmatrix} Q' & \ell' \\ {}^t\ell' & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {}^tM & 0 \\ {}^tv & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q & \ell \\ {}^t\ell & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} M & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$=$

$$\begin{pmatrix} {}^t M & 0 \\ {}^t v & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} Q \cdot M & Q \cdot v + \ell \\ {}^t \ell \cdot M & {}^t \ell \cdot v + c \end{pmatrix}$$

$$\parallel$$

$$\Longrightarrow Q' = {}^t M \cdot Q \cdot M \qquad \begin{pmatrix} {}^t M \cdot Q \cdot M & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Vedremo come classificare $\left\{ x \in \mathbb{R}^n : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \right\}$ con A simm, $\det(A) \neq 0$ per $n=2$ e $n=3$ usando teorema spettrale + altra teoria.

Oggi: $n=2$ <u>a mano</u>.

$$\otimes \quad a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Poniamo:

$$d_1 = a_{11} \qquad d_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad d_3 = \det(A)$$

Teo: se $d_3 \neq 0$ il luogo definito da $\circledast$ a meno di trasformazioni affini diviene:

- Se $d_2 = 0$, $x_2 = x_1^2$ (parabola)
- Se $d_2 < 0$, $x_1^2 - x_2^2 = 0$ (iperbole)
- Se $d_2 > 0$
  - se $d_1 \cdot d_3 > 0$, $x_1^2 + x_2^2 + 1 = 0$ (vuoto)
  - se $d_1 \cdot d_3 < 0$, $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (ellisse)

Es: $7x^2 - 9xy + 2y^2 - 5x + 7y + 1 = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -9/2 & -5/2 \\ -9/2 & 2 & 7/2 \\ -5/2 & 7/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{oppure} \quad A = \begin{pmatrix} 14 & -9 & -5 \\ -9 & 4 & 7 \\ -5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$d_1 = 14 > 0$

$d_2 = 56 - 81 < 0$

$d_3 = 14 \cdot 4 \cdot 2 - \dots \neq 0$

bisogna verificare che è $\neq 0$

$\Rightarrow$ l'equazione definisce un'iperbole.

cioè: esiste una trasformazione affine che manda il luogo di equazione $7x^2-9xy\ldots=0$ nel luogo di equazione $x^2-y^2=1$.

Dimo:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{13}x_1 + 2a_{23}x_2 + a_{33} = 0$$

$d_2 = 0$ $(d_3 \neq 0)$: voglio provare che "è una parabola"

(esiste cambio di coord. affine che lo trasforma in $x_2 = x_1^2$) _

$$d_2 = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

$\Rightarrow$ $a_{12}^2 = a_{11}a_{22} \geq 0$ $\Rightarrow$ a_{11}, a_{22} concordi a meno di cambiare segno all'equaz. avrò

$a_{11}, a_{22} \geq 0 \Rightarrow a_{12} = \sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}}$; equaz:

$$(\sqrt{a_{11}})^2 x_1^2 + 2\sqrt{a_{11}} \cdot \sqrt{a_{22}} \cdot x_1 x_2 + (\sqrt{a_{22}})^2 \cdot x_2^2 + 2a_{13} x_1 + 2a_{23} x_2 + a_{33} = 0$$

cioè
$$\Big(\underbrace{\sqrt{a_{11}} \cdot x_1 + \sqrt{a_{22}}\, x_2}_{y_1}\Big)^2 = \underbrace{-2a_{13}x_1 - 2a_{23}x_2 - a_{33}}_{y_2}$$

dunque l'equaz. diventa $y_2 = y_1^2$ ma devo verificare che è un vero cambio di coord, cioè la matrice della parte lineare ha det $\neq 0$:

$$\det \begin{pmatrix} \sqrt{a_{11}} & -2a_{13} \\ \sqrt{a_{22}} & -2a_{23} \end{pmatrix} = 2\left(a_{13}\sqrt{a_{22}} - a_{23}\sqrt{a_{11}}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \sqrt{a_{11}a_{22}} & a_{13} \\ \sqrt{a_{11}a_{22}} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{13}\left(a_{23}\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{13}a_{22}\right) - a_{23}\left(a_{23}a_{11} - a_{13}\sqrt{a_{11}a_{22}}\right)$$

$$= -a_{13}^2 a_{22} + 2a_{13}a_{23}\sqrt{a_{11}a_{22}} - a_{23}^2 a_{11}$$

$$= -\left(a_{13}\sqrt{a_{22}} - a_{23}\sqrt{a_{11}}\right)^2$$

per ipotesi è $\neq 0$ dunque ok.

$d_2 \neq 0$. Esegu ... un cambio di coord. lineare del tipo

$$\begin{cases} x_1 = y_1 + t y_2 \\ x_2 = -t y_1 + y_2 \end{cases} \qquad \det\begin{pmatrix} 1 & t \\ -t & 1 \end{pmatrix} = 1 + t^2 > 0 \quad \forall t$$

I segni di d_2 e d_3 non cambiano con tale cambio di coordinate, poiché

$$A' = {}^tT \cdot A \cdot T \Rightarrow \det(A') = \det(T)^2 \cdot \det(A)$$

$$Q' = {}^tM \cdot Q \cdot M \Rightarrow \ldots$$

(vedremo che possiamo fare in modo che anche da non cambi segno) _

Voglio che una volta fatto il cambio di coord non compaia $y_1 \cdot y_2$:

$$a_{11} \cdot (y_1 + t y_2)^2 + 2 a_{12} (y_1 + t y_2)(-t y_1 + y_2) + a_{22} \cdot (-t y_1 + y_2)^2$$
$$+ \ldots = 0$$

$$y_1^2 \cdot \left(a_{11} - 2t a_{12} + t^2 a_{22} \right)$$

$$+ y_1 y_2 \cdot 2 \left(t a_{11} + a_{12} - t^2 a_{12} - t a_{22} \right)$$

$$+ y_2^2 \cdot \left(t^2 a_{11} + 2t a_{12} + a_{22} \right) + \dots = 0$$

Voglio: $a_{12} t^2 - t(a_{11} - a_{22}) - a_{12} = 0$

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4 a_{12}^2$$

è positivo a meno che $a_{22} = a_{11}$
$a_{12} = 0$

(nel qual caso non mi serve cambiare: $x_1 x_2$ già non c'è)

$\Longrightarrow$ ho due soluzioni $t_{1,2}$ discordi (antireciproche).

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{11} &= a_{22}t^2 - 2a_{12}t + a_{11} \\ \alpha_{22} &= a_{11}t^2 + 2a_{12}t + a_{22} \end{aligned}\right\} \Delta/4 = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -d_2$$

dunque se $d_2 > 0$ ho α_{11} concorde con a_{11}

α_{22} concorde con a_{22}

$\forall t$

<u>Fatto</u>: anche per $d_2 < 0$ una delle due scelte

$t = t_{1,2}$ dà α_{11} concorde con a_{11}, α_{22} concorde con a_{22}.

<u>Morale</u>: dopo cambio coord, senza cambiare segno e d_1, d_2, d_3 siamo a

$$\alpha_{11} y_1^2 + \alpha_{22} y_2^2 + 2\alpha_{13} y_1 + 2\alpha_{23} y_2 + \alpha_{33} = 0$$

$d_2 > 0$: se nec. cambio segno e ho $\alpha_{11} > 0$, $\alpha_{22} > 0$

$$\underbrace{\left(\sqrt{\alpha_{11}} \cdot y_1 + \frac{\alpha_{13}}{\sqrt{\alpha_{11}}}\right)}_{z_1}^2 + \underbrace{\left(\sqrt{\alpha_{22}} \cdot y_2 + \frac{\alpha_{23}}{\sqrt{\alpha_{22}}}\right)}_{z_2}^2 =$$

$$= \underbrace{\frac{\alpha_{13}^2}{\alpha_{11}} + \frac{\alpha_{23}^2}{\alpha_{22}} - \alpha_{33}}_{c} \qquad \begin{pmatrix} >0 & 0 \\ 0 & >0 \end{pmatrix}$$

Se $c>0$ viene ellisse dopo omotetia $1/\sqrt{c}$

se $c<0$ viene $\emptyset$:

$$d_3 = \det \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22}\alpha_{33} - \alpha_{13}^2\alpha_{22} - \alpha_{23}^2\alpha_{11}$$

$$= \underbrace{\alpha_{11}\,\alpha_{22}}_{>0} \cdot \left(- c \right)$$

$\Rightarrow$ $d_3 > 0$ (cioè $d_1 \cdot d_3 > 0$) $\Rightarrow$ $\emptyset$

$d_3 < 0$ (cioè $d_1 \cdot d_3 < 0$) $\Rightarrow$ ellisse

$d_2 < 0$. In modo simile ci si riconduce a

$$z_1^2 - z_2^2 = c$$

($d_3 \neq 0 \Rightarrow c \neq 0$) $\Rightarrow$ iperbole.

$\blacksquare$

———— o ————

Esercizi su prod scal.

(24) trovare $X \in M_{\ldots \times \ldots}$ autoaggiunte risp e $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$
+ altre condiz.

autoaggiunta: $\langle X \cdot v | w \rangle_A = \langle v | X \cdot w \rangle_A \quad \forall v, w$

$$\iff {}^t v \cdot {}^t X \cdot A w = {}^t v \cdot A \cdot X \cdot w \quad \forall v, w$$

$$\iff {}^t X \cdot A = A \cdot X.$$

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a = 3a \ ✓ \\ 2c = 3b \\ 3b = 2c \ ✓ \\ 2d = 2d \ ✓ \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & 2t \\ 3t & d \end{pmatrix}$$

$a, d, t \in \mathbb{R}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad X \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a+3c = 2b-d \\ 2a-b = 5 \\ 2c-d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = 2a-5 \\ d = 2c \\ -a+3c = 4a-10-2c \end{cases}$$

$$(\cancel{5}a - \cancel{5}c = \underset{2}{\cancel{10}})$$

$$\begin{cases} a = 2 + t \\ c = t \\ b = 2t - 1 \\ d = 7t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad tr(X) = 0 \quad {}^tX = X$

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

$a + b = 2b - a \qquad b = 2a$

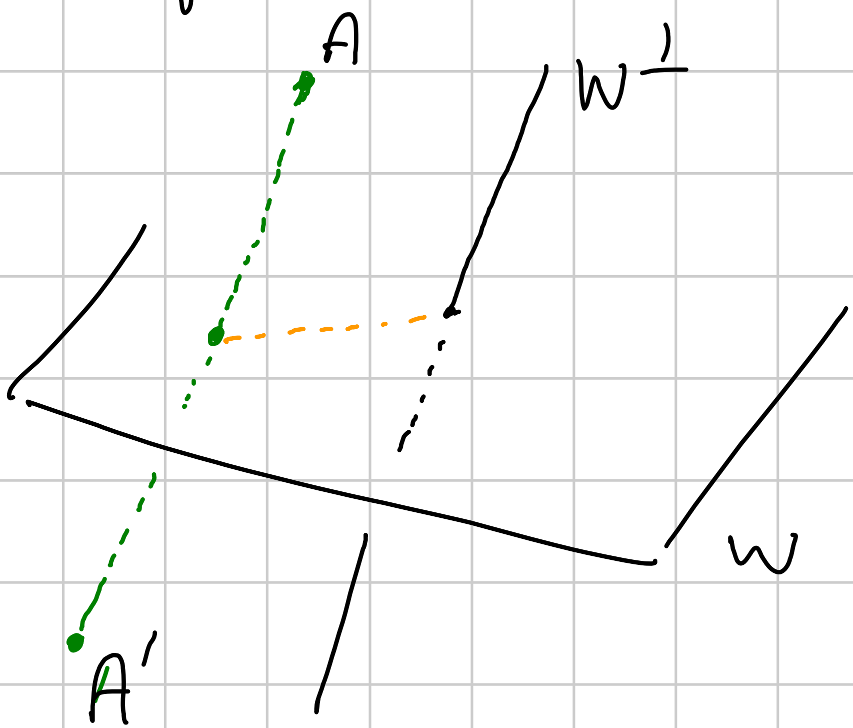
(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad {}^tX + X = 0$

$X = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$

${}^tX \cdot A = A \cdot X \rightsquigarrow 3$ equaz. in a, b, c

da cui $a = b = c = 0$_

(25) Trovare la matrice della riflessione f rispetto a $W: 2x-3y+4z=0$ in $\mathbb{R}^3$



$$W^\perp = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$A = p_W(A) + p_{W^\perp}(A)$$

$$A' = p_W(A) - p_{W^\perp}(A)$$

$$\Rightarrow f(A) = A - 2\, p_{W^\perp}(A)$$

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2\, \frac{2x - 3y + 4z}{\underbrace{4 + 9 + 16}_{29}} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{29} \begin{pmatrix} 21 & 12 & -16 \\ 12 & 11 & 24 \\ -16 & 24 & -3 \end{pmatrix}}_{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

$${}^tM = M^{-1} = M.$$

Martedì 8/4 : 14 – 15:30

(25) (b) g una rotaz. di $\pi/6$ intorno a $\mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Rotaz. intorno all'asse x_1 di $\pi/6$:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \mp 1/2 \\ 0 & \pm 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

asse x_1 $= \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Se troviamo M ortogonale (isometria)

t.c. $M\left(\mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = \mathrm{Span}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

allora basta prendere

$$M^{-1} \cdot R \cdot M .$$

Vogliamo $M \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Basterà trovare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\ u_2,\ u_3$$

e porre $M = (u_1 \; u_2 \; u_3)^{-1}$

(in modo che $M \cdot u_1 = e_1$) — Allora

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque $M = (u_1, u_2, u_3)^{-1} = {}^t(u_1, u_2, u_3)$

$$= \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/\sqrt{3} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$$ {}^t M \cdot R \cdot M = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} & 1 & 1-\sqrt{3} \\ 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} & 1 \\ 1 & 1-\sqrt{3} & 1+\sqrt{3} \end{pmatrix} $$

una delle due

E' ortog:

$$ \frac{1}{3}\left(1+\cancel{2\sqrt{3}}+3+1-\cancel{2\sqrt{3}}+3+1\right) = 1 \ \ldots \checkmark $$

$$ (1+\sqrt{3})\cdot 1 + (1-\sqrt{3})(1+\sqrt{3}) + 1(1-\sqrt{3}) = $$

$$ = 1+\sqrt{3}+1-3+1-\sqrt{3} = 0 \ \ldots \checkmark $$

(26) M $n \times n$ $\quad {}^tM \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \ \lambda_j \neq 0$

Per quali D diago si ha $M \cdot D$ è ortog?

$M = (v_1, \dots, v_n)$ $\qquad {}^tv_i \cdot v_j = \begin{cases} 0 & \text{se } i \neq j \\ \lambda_i & \text{se } i = j \end{cases}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \shortparallel$

$\qquad\qquad\qquad\quad \langle v_i | v_j \rangle$

(cioè $v_1, \dots, v_n$ è base ortogonale)

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \Rightarrow D \cdot M = (\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n)$$

Dunque $D \cdot M$ è matrice ortogonale

$\Leftrightarrow$ $(\alpha_1 v_1, \dots, \alpha_n v_n)$ è base ortonormale

$\Leftrightarrow$ ogni $\alpha_j = \pm \dfrac{1}{\|v_j\|} = \pm \dfrac{1}{\sqrt{\lambda_j}}$.

Ho due scelte per ogni $j = 1, \dots, n$

$\Rightarrow$ in tutto 2^n.

(27) $\mathbb{C}$, $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^2}$: cercare z con $\|z\| = 1$

$z_2 \in i \cdot \mathbb{R}$, $z \perp \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$.

Oss: II e III condiz. non cambiano moltiplicando per $\lambda \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ cerco z che soddisfa II e III, e poi prendo $\pm$ lui normalizzato.

Cerco $z = \begin{pmatrix} \alpha \\ i \end{pmatrix}$: $\alpha \cdot (2+i) + i(1-3i) = 0$

$$\alpha = -\frac{3+i}{2+i} = -\frac{(3+i)(2-i)}{5} = -\frac{6+1-3i+2i}{5}$$

$$= (i-7)/5$$

$$\Longrightarrow \pm \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i-7 \\ 5i \end{pmatrix}.$$

(28) $z \in \mathbb{C}^3$; $\|z\| = 1$, $z_2 \in \mathbb{R}$, $z_1 + z_2 + z_3 = 0$

$z \perp \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$.

II, III, IV sono preservate moltiplicando per $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Longrightarrow$ realizzo II, III, IV, poi $\pm$ normalizzo.

$$z = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1 \\ -1-\alpha \end{pmatrix} \qquad \alpha \cdot (1-i) + 1 \cdot (2+i) + (-1-\alpha)(1-2i) = 0$$

$$\alpha(1-i-1+2i) = -2-i+1-2i$$

$$\alpha = -i(-1-3i) = i-3$$

$$\Longrightarrow \quad z = \pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i-3 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

Ese: trovare tutti gli $z \in \mathbb{C}^2$ unitari e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 3+2i \end{pmatrix}$.

Cerco $z \perp \begin{pmatrix} 2-i \\ 3+2i \end{pmatrix}$, poi normalizzo, e vanno bene $e^{iv} \cdot$ il vettore trovato.

$$\cancel{\begin{pmatrix} 3+2i \\ i-2 \end{pmatrix}}$$

$$z = \frac{e^{iv}}{3\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3-2i \\ -i-2 \end{pmatrix} \qquad \forall v \in \mathbb{R}$$

__Esercizio__: trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^3$ unitari e ortogonali a

$$\begin{pmatrix} 1-i \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 1+i \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\cancel{\begin{pmatrix} 1\cdot 2 - i(1+i) \\ -((1-i)\cdot 2 - i\cdot i) \\ (1-i)(1+i) - 1\cdot i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-i \\ -3+2i \\ 2-i \end{pmatrix}}$$

invece $\dfrac{e^{i\alpha}}{\sqrt{28}} \begin{pmatrix} 3+i \\ -3-2i \\ 2+i \end{pmatrix}$

29) Trovare A matrice di proiez. ortog su $\begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix}$

$$p_{\overline{W}}(z) = \frac{(2-i)z_1 + (1+3i)\cdot z_2}{4+1+1+9}\begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -1+7i \\ -1-7i & 10 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Proiezione : $A^2 = A$ ✓

Proiez. ortog $\Longrightarrow$ autoaggiunta

$$\langle Az | w \rangle = \langle z | Aw \rangle \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^2$$

cioè $\quad w^* \cdot A \cdot z = w^* \cdot A^* \cdot z \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^2$

cioè $\quad A^* = A$.

(Su $\mathbb{C}$: A autoaggiunta rispetto $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$
significa A hermitiana.)

Per noi

$$A = \frac{1}{15}\begin{pmatrix} 5 & -1+7i \\ -1-7i & 10 \end{pmatrix}$$

$A^* = A$ evidente_