UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 13/9/14 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se $Y = \{y \in \mathbb{R}^3 : \ 9y_1 - 5y_2 + 7y_3 = 0\}$ e $g : \ Y \to Y$ è lineare,
la g può avere gli autovalori $-\sqrt[4]{11}$, 8, $\sqrt{100e}$?

2. Se $V = \{y \in \mathbb{R}^3 : \ 9y_1 - 7y_2 + 2y_3 = 0\}$ e $h : \ V \to V$ ha i soli autovalori -13 e 17,
si può concludere che è diagonalizzabile oppure che non lo è?

3. Determinare il coseno dell'angolo formato in $\mathbb{R}^4$ dai vettori $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice simmetrica $\begin{pmatrix} 3-t & t+1 \\ t+1 & 2t+5 \end{pmatrix}$ ha gli autovalori positivi.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $3x^2 - 8y^2 - 10xy + 6xz + 4yz - 2z = 0$.

6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[-t : 1 + 2t : t + 5] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ appartiene
alla retta proiettiva passante per $[2 : 1 : -3]$ e $[1 : 7 : -8]$.

7. Calcolare $\int_\alpha x \, \mathrm{d}y$ con $\alpha : \ \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 13/9/14 — Esercizî

1. Considerare $X = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 16 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3$ e $A = \begin{pmatrix} -6 & -4 & 4 \\ 11 & 7 & -5 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su X, verificandone le proprietà caratterizzanti.

(B) (3 punti) Calcolare il polinomio caratteristico di A e i suoi autovalori con la loro molteplicità algebrica.

(C) (3 punti) Stabilire se A sia diagonalizzabile.

(D) (3 punti) Stabilire se l'applicazione lineare $f : X \to X$ data da $f(x) = 14 \cdot M \cdot A \cdot x$ sia diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha(s) = \begin{pmatrix} 3\mathrm{e}^s - s^2 \\ \cos(s) + s^3 + s \\ \frac{s}{s-1} \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Trovare il più grande intervallo I contenente 0 su cui α è definita.

(B) (2 punti) Provare che su I la α è semplice e regolare.

(C) (3 punti) Trovare il riferimento di Frénet di α in $s = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare curvatura e torsione di α in $s = 0$.

(E) (3 punti) Calcolare $\int_\beta xz(z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}z)$ dove β è la restrizione di α a $[-1, 0]$.

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 13/9/14 — Quesiti

Risposte

5. ♡

1. No, V ha dimensione 2 dunque g ha al massimo 2 autovalori distinti

2. Sì, V ha dimensione 2, dunque h avendo 2 autovalori distinti è diagonalizzabile

3. $-\frac{1}{9\sqrt{2}}$

4. $-\frac{7}{3} < t < 2$

5. Paraboloide iperbolico

6. $t = -3$

7. $\frac{\pi}{2}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $M = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 13 & 2 \\ 6 & 2 & 10 \end{pmatrix}$; si ha che M è simmetrica e $M \cdot M = M$

(B) $t^3 - t^2 - 8t + 12$; autovalori 2 con m.a. 2 e -3 con m.a. 1

(C) No perché m.g.(2) $= 1$

(D) No; rispetto alla base $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ ha matrice $\begin{pmatrix} 54 & -23 \\ 6 & 34 \end{pmatrix}$, dunque ha polinomio caratteristico $t^2 - 88t + 1974$, che non ha radici reali

2.

(A) $I = (-\infty, 1)$

(B) La terza componente di α ha derivata negativa su I

(C) $t(0) = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $n(0) = -\frac{1}{5\sqrt{22}}\begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ 18 \end{pmatrix}$, $b(0) = \frac{1}{5\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

(D) $\kappa(0) = \frac{5\sqrt{2}}{11\sqrt{11}}$, $\tau(0) = \frac{9}{10}$

(E) $-\frac{1}{8}\left(\frac{3}{e} - 1\right)^2$