ETA 10/12/13

Giovedì 12/12 – lezione 11-13 sì

Esercizi: (1) Calcolare $H_*(S^1 \times S^1 \cup D^2 \times \{pt\})$

(2) Calcolare $H_*(Y)$ dove $Y = X/\sim$

$$X = \{(t,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C} : (1-|t|)^2 + |z|^2 \leq 1\}$$
$$\cup \{(t,z) \in \mathbb{R}\times\mathbb{C} : \operatorname{Im}(z)\cdot\operatorname{Re}(z) = 0\} \cup \{\infty\}$$
$$\subset \mathbb{R}\times\mathbb{C} \cup \{\infty\} = S^3.$$

$(t,z) \sim (s,w)$ se

$s = t > 0$, $|z|^2 = |w|^2 = t(2-t)$, $z^2 = w^2$

$s = t < 0$; $|z|^2 = |w|^2 = -t(2+t)$, $z^4 = w^4$.

(3) $S^3 = \{a + ib + jc + k\cdot d : a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1\}$ gruppo

$$G = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\} < S^3$$

$X = S^3/G$ azione: moltiplicaz. a sx
$g(x) = g \cdot x$

Trovare su X una struttura di CW complesso per cui il complesso $\{(C_n, \partial_n)\}$ è:

$$\cdots \quad \begin{array}{c} C_4 \\ \parallel \\ 0 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} C_3 \\ \parallel \\ \mathbb{Z} \end{array} \xrightarrow[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}]{} \begin{array}{c} C_2 \\ \parallel \\ \mathbb{Z}^3 \end{array} \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}]{} \begin{array}{c} C_1 \\ \parallel \\ \mathbb{Z}^4 \end{array} \xrightarrow[\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}]{} \begin{array}{c} C_0 \\ \parallel \\ \mathbb{Z}^2 \end{array} \to 0$$

Usare tale complesso per calcolare $H_*(X)$.

— o —

Coomologia.

$\{(C_n, \partial_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ complesso di catene di gruppi abeliani liberi

G gruppo abeliano ;

$C^n(G) = \mathrm{Hom}(C_n, G)$ ("dualizzazione")

In generale $f : A \to B$ omomorf dà

$$f^* : \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$$

$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

$\{(C_n, \partial_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ complesso di catene di gruppi abeliani liberi

G gruppo abeliano ;

$C^n(G) = \mathrm{Hom}(C_n, G)$ ("dualizzazione")

In generale $f : A \to B$ omomorf dà

$$f^* : \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

$\{(C_n, \partial_n)\}_{n=0}^{+\infty}$ complesso di catene di gruppi abeliani liberi

G gruppo abeliano ;

$C^n(G) = \mathrm{Hom}(C_n, G)$ ("dualizzazione")

In generale $f : A \to B$ omomorf. dà

$$f^* : \mathrm{Hom}(B, G) \to \mathrm{Hom}(A, G)$$
$$\varphi \longmapsto \varphi \circ f$$

Sia $\delta_n^G : C^n(G) \longrightarrow C^{n+1}(G)$

definito come ∂_{n+1}^*, cioè

$$(\delta_n^G \varphi)(u) = \varphi(\partial_{n+1} u) .$$

$\varphi \in C^n(G)$, $u \in C_{n+1}$

In generale $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$: da cui

$$\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0 .$$