UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 28/6/14 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Determinare la base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ tale che $\left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 7x_1 + 3x_2 \\ 5x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$ per ogni $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

2. Se in $X = \{p(t) \in \mathbb{C}_{\leqslant 4}[t] : \ p(-i) = p'(1+i) = 0\}$ sono dati $p_1(t), p_2(t), p_3(t)$ linearmente indipendenti, si può concludere che costituiscono una base? Giustificare la risposta.

3. Se $f : \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^7$ è lineare non surgettiva e $f(3e_2 + 7e_5) = 4e_6$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

4. Risolvere $\begin{cases} 4x + y - 2z = -1 \\ 3x - y - z = 2 \\ 5x + 3y - 3z = -4. \end{cases}$

5. Calcolare $\begin{pmatrix} 1+i & -2 \\ 2-i & i-1 \end{pmatrix}^{-1}$.

6. Data $A = (v_1,\ v_2,\ v_3) \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ con $\det(A) = -\frac{1}{10}$
calcolare $\det(2v_1 + 3v_3,\ -v_1 + 2v_2 + 4v_3,\ 6v_2 - v_3)$.

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

calcolare la proiezione su X di $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Posto $f(x) = A \cdot x$ provare che f è invertibile.

(B) (2 punti) Calcolare $(A^{-1})_{23}$.

(C) (2 punti) Provare che le colonne di B costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$.

(D) (2 punti) Provare che le colonne di C costituiscono una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$.

(E) (3 punti) Calcolare la seconda colonna di $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$.

2. Al variare di $t, s \in \mathbb{R}$ considerare in $\mathbb{R}^3$ i sottospazî affini

$$E_t : \begin{cases} (t-1)x + (t-2)y + (1-2t)z = t \\ (t+1)x + (5-t)y - (3t+1)z = t+3 \end{cases} \qquad F_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} s+3 \\ -1-s \\ 3-s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -s-7 \\ s+4 \\ s-2 \end{pmatrix} \right).$$

(A) (3 punti) Trovare $n, n_0 \in \mathbb{N}$ e $t_0 \in \mathbb{R}$ tali che E_t ha dimensione n per $t \neq t_0$, mentre ha dimensione n_0 per $t = t_0$.

(B) (3 punti) Trovare $m, m_0 \in \mathbb{N}$ e $s_0 \in \mathbb{R}$ tali che F_s ha dimensione m per $s \neq s_0$, mentre ha dimensione m_0 per $s = s_0$.

(C) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di E_t per $t = -2$ e per $t = t_0$.

(D) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di F_s per $s = 1$ e per $s = s_0$.

(E) (2 punti) Trovare l'intersezione tra E_1 e $F_{(-1)}$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. ♢

1. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix} \right)$

2. Sì perché X ha dimensione 3

3. Tra 3 e 8 compresi

4. $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \operatorname{Span} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix}$

5. $\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -2 & 2+2i \\ -3-i & 2i \end{pmatrix}$

6. 7

7. $\frac{1}{7} \begin{pmatrix} 34 \\ 3 \\ -13 \end{pmatrix}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $\det(A) = -1$

(B) 3

(C) $\det(B) = 4$

(D) $\det(C) = -1$

(E) $\begin{pmatrix} -7 \\ -3 \\ 27 \end{pmatrix}$

2.

(A) $n = 1,\ n_0 = 2,\ t_0 = 3$

(B) $m = 2,\ m_0 = 1,\ s_0 = 5$

(C) $\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

(D) $2x + 3y - z = 3, \quad \begin{cases} 3x + 4y = 7 \\ x + 4z = 9 \end{cases}$

(E) $\begin{pmatrix} 2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$