UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 7/6/14 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in $V = \{v \in \mathbb{C}^6 : \; iz_1+5z_4+(2-i)z_6 = 2z_2+(1-i)z_3+z_5\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base di V?

2. Trovare $v \in \mathbb{R}^2$ sapendo che per $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \; v \right)$ si ha $\left[\begin{pmatrix} 6 \\ -13 \end{pmatrix} \right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

3. Posto $Y = \{y \in \mathbb{R}^9 : \; 9y_4 = 5y_8\}$, se U e Z sono sottospazî di Y, con $\dim(U) = 3$ e $U + Z = Y$, che dimensione può avere Z?

4. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ stabilire quante soluzioni ha il sistema $\begin{cases} (1-t)x + (t+8)y = 1+5t \\ tx + (t-2)y = 4-t. \end{cases}$

5. Date $M, N \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sapendo che $\det(M) = 1$ e $\det(N) = 3$, si può concludere che $\det(M+N) = 4$? Giustificare la risposta.

6. In una matrice 6×8, quante sono le orlate di una sottomatrice 3×3?

7. Dati $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; 4x_1 + 4x_2 - x_3 = 0\}$ e $Y = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ calcolare la proiezione su X di $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 7/6/14 — Esercizî

1. In $\mathbb{R}^4$ considerare $X : \begin{cases} 4x_1+5x_2+2x_3+9x_4=0 \\ 5x_1+x_2-2x_3-6x_4=0, \end{cases}$ $\quad Y = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}\right)$.

(A) (2 punti) Trovare equazioni parametriche di X.

(B) (2 punti) Trovare equazioni cartesiane di Y.

(C) (3 punti) Determinare $X \cap Y$ e dedurne la dimensione di $X+Y$.

(D) (1 punto) Provare che $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}\right)$ è una base di X.

(E) (1 punto) Provare che $\mathcal{C} = \left(\begin{pmatrix} 10 \\ -1 \\ 1 \\ 12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ -10 \\ 17 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ è una base di Y.

(F) (3 punti) Data $f:\ X \to Y$ lineare con $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$ calcolare $f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Considerare $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ data da $\varphi(y) = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 & 6 \\ -4 & 2 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot y$.

(A) (2 punti) Provare che φ è surgettiva e dedurne la dimensione di $\mathrm{Ker}(\varphi)$.

(B) (2 punti) Provare che esiste unica $\psi :\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$ lineare tale che
$\psi(e_1) = 3e_2 - e_3 + 2e_4, \quad \psi(e_2) = 2e_1 - e_2 - e_4$.

(C) (2 punti) Calcolare il rango di $\psi \circ \varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$.

(D) (3 punti) Determinare $B \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tale che $(\varphi \circ \psi)(x) = B \cdot x$ per ogni $x \in \mathbb{R}^2$.

(E) (3 punti) Calcolare B^{-1}.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\heartsuit$

1. 2

2. $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. Tra 5 e 8 compresi

4. Infinite per $t = -2$, nessuna per $t = -\frac{1}{2}$, una altrimenti

5. No; per $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ e $N = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ si ha che $\det(M) = 1$ e $\det(N) = 3$, mentre $\det(M + N) = \det \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 8$

6. 15

7. $\frac{4}{9} \begin{pmatrix} 11 \\ -8 \\ 12 \end{pmatrix}$

Soluzioni

1.

(A) Span $\left(\begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 13 \\ -4 \end{pmatrix} \right)$

(B) $\begin{cases} x_1 + 23x_2 + 13x_3 = 0 \\ 29x_2 + 17x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$

(C) Span $\begin{pmatrix} -5 \\ 7 \\ -12 \\ 1 \end{pmatrix}$, dunque $X + Y$ ha dimensione $2 + 2 - 1 = 3$

(D) $\mathcal{B}$ consiste di due vettori linearmente indipendenti di X

(E) $\mathcal{C}$ consiste di due vettori linearmente indipendenti di Y

(F) $\begin{pmatrix} -11 \\ -8 \\ 15 \\ -23 \end{pmatrix}$

2.

(A) Le prime due colonne della matrice di φ sono una base di $\mathbb{R}^2$; il nucleo di φ ha dimensione 2

(B) ψ è assegnata su una base

(C) 2

(D) $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -11 & -3 \end{pmatrix}$

(E) $\frac{1}{37}\begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}$