Alg. Lin. 18/12/13

14 (4) $A = (v_1, v_2, v_3)$ $\det(A) = 3$

$B = (v_2 - 2v_3, 2v_1 + 5v_3, v_1 - v_2 + 2v_3)$; $\det B = ?$

Uso la linearità di det nelle colonne:

$$\det(B) = \det(v_2, 2v_1 + 5v_3, v_1 - v_2 + 2v_3)$$
$$- 2\det(v_3, 2v_1 + 5v_3, v_1 - v_2 + 2v_3)$$

$= \dots$ 12 addendi ciascuno del tipo

$$\text{coeff} \cdot \underbrace{\det(v_i, v_j, v_k)}$$

nullo se un indice si ripete

$\Rightarrow$ dei 12 sono non nulli:

$$1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \underbrace{\det(v_2, v_1, v_3)}_{-3} + 1 \cdot 5 \cdot 1 \cdot \underbrace{\det(v_2, v_3, v_1)}_{3} + (-2) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot \underbrace{\det(v_3, v_1, v_2)}_{3}$$

$$= 3 \cdot (-4 + 5 + 4) = 15$$

Secondo metodo:

$$B = (v_2 - 2v_3,\ 2v_1 + 5v_3,\ v_1 - v_2 + 2v_3)$$

$$\Rightarrow \quad B = \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}}_{= A} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(B) = \det(A) \cdot \det\left(\quad \right) = 3 \cdot (4 + 5 - 4) = 15.$$

$\boxed{5}$ 3 $\quad f: \mathbb{R}^7 \to \mathbb{R}^4$, $3e_2 - 2e_3 \notin \operatorname{Im} f$, $X \subset \mathbb{R}^7$

$\dim(X \cap \operatorname{Ker} f) = 1$. $\quad \dim X = ?$

$$0 \leq \dim \operatorname{Im} f \leq 3 \quad \Rightarrow \quad 4 \leq \dim \operatorname{Ker} f \leq 7$$

$$\Rightarrow \quad 1 \leq \dim X \leq 4$$

(Se $\dim X \geq 5$ allora $\dim(X \cap \operatorname{Ker} f)$

$= \dim X + \dim \operatorname{Ker} f - \dim(X + \operatorname{Ker} f)$)

$\geq 5 + 4 - 7 = 2$.)

(6) $A \in M_{4\times 4}$ B sottomatrice 2×2

$\operatorname{rank}(A) = 3$, $\det B \neq 0$.

Può B avere una sola orlata con $\det \neq 0$?

Teo orlati: almeno una sì (altrimenti $\operatorname{rank} A = 2$).

Una sola?

B

B'

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\det(B'') = 0$ $\forall B''$ orlato di B, $\neq B'$. Sì.

$\boxed{6}$ (7) $X : 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0$ $Y = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrice proiez. su X rispetto a

$\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$.

$p\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ se non sta in X, cioè

$$(2,7,-3)\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - t\cdot\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}\right)=0$$

cioè $t = \dfrac{2x+7y-3z}{2-14-3} = -\dfrac{1}{15}(2x+7y-3z)$

$$p\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{15}\begin{pmatrix}17 & 7 & -3\\-4 & 1 & 6\\2 & 7 & 12\end{pmatrix}}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

$\boxed{7}$ (1) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ $\quad f\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$ $\quad f\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$

$$f^{-1}\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix} = f^{-1}\left(3\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$= 3\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix}-2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-4\end{pmatrix}$$

---

oppure (meglio):

$$A\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A^{-1}\cdot\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\2 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{pmatrix}^{-1}\cdot\begin{pmatrix}5\\-8\end{pmatrix}$$

(2) $X = \{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : p(-1) = 0 \}$ $\quad \dim X = 3 - 1 = 2$

$\mathcal{B} = (1+2t+t^2, 1-3t-4t^2)$ base

$[5+2t-3t^2]_{\mathcal{B}}$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{17}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{8}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$[\dots]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 17 \\ 8 \end{pmatrix}$$

(3) $w \in \mathbb{C}$ t.c. $\begin{pmatrix} 1+w & 2i-3 \\ w-2i & 1+i \end{pmatrix}$ non inv.

$$1+i-4-6i \qquad + w(1+i-2i+3) = 0$$

$$\Rightarrow w = \frac{+3+5i}{4-i} = \frac{(3+5i)(4+i)}{17} = \frac{7+23i}{17}$$

(5) Quante soluz ha $\begin{cases} (1-k)x + 3ky = 7-k \\ kx + (2-k)y = 3k \end{cases}$?

Una sola se $\det\begin{pmatrix} 1-k & 3k \\ k & 2-k \end{pmatrix} \neq 0$:

$$k^2-3k+2-3k^2 = -(2k^2+3k-2) = -(2k-1)(k+2)$$

Soluz. unica per $k \neq \frac{1}{2}$, $k \neq -2$.

$k=-2$: $\begin{cases} 3x-6y=9 \\ -2x+4y=-6 \end{cases}$ ∞ soluzioni

$k=\frac{1}{2}$: $\begin{cases} x+3y=13 \\ x+3y=3 \end{cases}$ impossibile

$\boxed{9}$ 3 $A=(v_1, v_2, v_3)$ $\det(A)=2-i$

$B=(v_2-iv_3, 2v_1+iv_3, v_1-2iv_2)$

Sviluppando per linearità nelle colonne ho 8 addendi, di cui non nulli:

$$1\cdot i\cdot 1\ \underbrace{\det(v_2, v_3, v_1)}_{2-i} + (-i)\cdot 2\cdot(-2i)\cdot \underbrace{\det(v_3, v_1, v_2)}_{2-i}$$

$$= (2-i)(i-4) = -7+6i$$

Oppure: $B = (v_1, v_2, v_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -2i \\ -i & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\det = i-4}$

(4) $f: M_{3\times 3} \to M_{3\times 3}$ $\quad f(A) = A - 2 \cdot {}^tA$

$\dim(\operatorname{Im} f) = ?$

Base E_{ij} $\quad 1 \le i, j \le 3$

$f(E_{ii}) = -E_{ii}$

$f(E_{ij}) = E_{ij} - 2E_{ji}$ $\qquad i \neq j$

Rispetto alla base

$E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{21}, E_{13}, E_{31}, E_{23}, E_{32}$

la matrice di f è

$$\begin{pmatrix} -1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & -1 & & \\ & & & 1 & -2 \\ & & & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}$$

Esercizio: $\det \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} = \det(A) \cdot \det(B)$

(segue subito da sviluppi di Laplace)

$\Rightarrow f$ è invertibile.

(6) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$; $(A^{-1})_{12} = ?$

$$(A^{-1})_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \frac{\det \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{\det(A)} = - \frac{-9}{\substack{60 - 12 + 2 \\ -10 - 16 - 9}} = \frac{9}{11}$$

$\boxed{12}$ (3) $f : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^6$ $f(2e_1 - ie_2) = f(e_2 - ie_4) = 3e_1 + ie_6$

$W \subset \mathbb{C}^6$, $\mathbb{C}^6 = W \oplus \operatorname{Im} f$; $\dim W = ?$

Ipotesi: $\operatorname{Ker} f \geq 1$ $\operatorname{Im} f \geq 1$

$\Longrightarrow 1 \leq \dim \operatorname{Im} f \leq 4-1=3$

$\Rightarrow \dim W = 6 - \dim \operatorname{Im} f \Longrightarrow 3 \leq \dots \leq 5$

$\boxed{13}$ (6) $(1+i)z + 3\bar{z} = 9+4i$ $\qquad z = a+ib$

$(1+i)(a+ib) + 3(a-ib) = 9+4i$

$\begin{cases} 4a - b = 9 \\ a - 2b = 4 \end{cases} \qquad \begin{matrix} a=2 \\ b=-1 \end{matrix} \qquad z = 2-i$

$\boxed{15}$ (1) $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 0\}$

$f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad f\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad f^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = ?$

$f^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = f^{-1}\left((-1)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$= (-1) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

(3)

$$\det\begin{pmatrix} 4-i & 5i & 0 \\ -1 & 0 & 2i \\ 3 & 1-i & -8i \end{pmatrix} = 2i\cdot\det\begin{pmatrix} 4-i & 5i & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1-i & -4 \end{pmatrix}$$

$$= 2i\cdot\det\begin{pmatrix} 4-i & 5i & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1-i & 0 \end{pmatrix} = -2i\cdot\det\begin{pmatrix} 4-i & 5i \\ -1 & 1-i \end{pmatrix}$$

$$= -2i\left(4-i-4i-1+5i\right) = -2i(3) = -6i$$

(6)

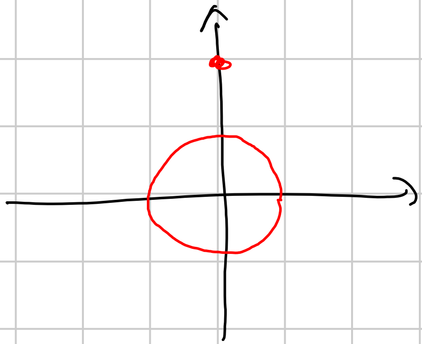
$$z^2\bar{z}+2i = z(2i\bar{z}+1)$$

$$z|z|^2+2i-2i|z|^2-z=0$$

$$|z|^2(z-2i)-(z-2i)=0$$

$$(|z|^2-1)(z-2i)=0$$

$$z=2i \quad \text{o} \quad |z|=1$$



$\boxed{16}$ (2) Trovare base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^2$ t.c. $[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}\cdot x \quad \forall x\in\mathbb{R}^2$

$$x = \mathcal{B}\cdot[x]_{\mathcal{B}}$$

$$x = B \cdot \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \cdot x \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

$$B \cdot \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = I_2$$

$$B = \begin{pmatrix} 5 & -8 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

ESERCIZI

$\boxed{1}$ (1)

$$\begin{cases} 4x + y + 2z = 3k \\ 3x + (k+3)y - z = 4 \\ kx + 3y - 7z = 17 \end{cases}$$

(A) Risolvere per $k=-2$; Cramer $x = \dfrac{\det \begin{pmatrix} -6 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 \\ 17 & 3 & -7 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -7 \end{pmatrix}} = \dots = \dfrac{25}{29}$

$y = \dots \qquad z = \dots$

(B) Discutere quante sono le soluz trovando k per cui ce ne sono infinite.

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & k+3 & -1 \\ k & 3 & -7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 10 & 2k+7 & 0 \\ 3 & k+3 & -1 \\ k-21 & -7k-18 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= -70k - 180 - 2k^2 - 7k + 147 + 42k = -(2k^2+35k+33)$$

$$= -(2k+33)(k+1)$$

Per $k \neq -1$ e $k \neq -\frac{33}{2}$ la soluz. è unica:

$k=-1$:

$$\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -7 & 17 \end{matrix}$$

So che questo è $\alpha \cdot \bigcirc + \beta \cdot \bigcirc$

è vero che $17 = \alpha \cdot (-3) + \beta \cdot 4$ → Sì: ∞ soluz
→ No: imposs.

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 3 \\ 2\alpha - \beta = -7 \end{cases} \qquad \alpha = -\frac{11}{5} \quad \beta = \frac{13}{5}$$

$\Big($ verifica:

$4 \cdot \left(-\frac{11}{5}\right) + 3 \cdot \frac{13}{5} \overset{?}{=} -9$

$\frac{1}{5}(-44 + 39)$ $\underline{\text{OK}}$ $\Big)$

$$-\frac{11}{5} \cdot (-3) + \frac{13}{5} \cdot 4 \overset{?}{=} 17$$

$$\frac{1}{5}(33 + 52) = \frac{1}{5} 85 = 17$$

$\underline{\text{SÌ}}$: ∞ soluz

$k_0 = -1$

$k = -\frac{33}{2}$: Omogenea: $III = \alpha \cdot I + \beta \cdot II$ $\left(\begin{matrix}\text{trovo} \\ \alpha \text{ e } \beta\end{matrix}\right)$

Termini noti: $III \overset{?}{=} \alpha \cdot I + \beta \cdot II$: $\underline{\text{NO}}$: Imposs.

(C) Per $k = -1$ sia W la giacitura delle soluz;
Se $Z = \text{Span}\left(\begin{pmatrix}2\\1\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right)$ trovare matrici proiezioni per $\mathbb{R}^3 = W \oplus Z$ _

$$W: \begin{cases} 4x + 1\cdot y + 2\cdot z = 0 \\ 3x + 2\cdot y - 1\cdot z = 0 \end{cases} \quad W = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -5 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$Z: 10x + 8y - 4z = 0 \quad ; \quad 5x + 4y - 2z = 0$$

$$(5\ 4\ -2)\underbrace{\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{P_W\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}\right)}_{P_Z\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = 0 \quad : \quad t = \frac{5x + 4y - 2z}{-5 + 8 - 2} = 5x + 4y - 2z$$

$$P_W\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -4 & +2 \\ 10 & 8 & -4 \\ 5 & 4 & -2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} ; \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 4 & -2 \\ -10 & -7 & 4 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}}$$

② $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $f = f_A$, $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & -7 \\ -3 & 1 & 9 \\ 5 & 7 & -2 \end{pmatrix}$

(A) Ep. di Ker f

$$\begin{cases} 2x + 4y + z = 0 & \checkmark \\ x - 3y - 7z = 0 & \checkmark \\ -3x + y + 9z = 0 & \times \\ 5x + 7y - 2z = 0 & \times \end{cases} \qquad \begin{cases} z = -2x - 4y \\ 15x + 25y = 0 \\ -21x - 35y = 0 & \times \\ 9x + 15y = 0 & \times \end{cases}$$

$$\mathrm{Ker}\, f = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(B) Provare che $\mathcal{B} = \left(f\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, f\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ è base di $\mathrm{Im}\, f$;

provare che $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix} \in \mathrm{Im}\, f$ e trovare $[v]_{\mathcal{B}}$ –

So che $\dim \mathrm{Im}\, f = 3 - 1 = 2$ quindi basta vedere che sono lin. indip.:

$$\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \qquad \text{Ok}$$

Se trovo α, β t.c. $\begin{pmatrix} 1 \\ -12 \\ 16 \\ -5 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$

ho $v \in \mathrm{Im} f$ e $[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$

Sì: $\alpha = 3$, $\beta = -2$

(C) Eq. Cart per Imf: $\begin{cases} 4 \cdot x + 7y + 5 \cdot z + 0 \cdot w = 0 \\ 0 \cdot x + 13y + 11 \cdot z + 4 \cdot w = 0 \end{cases}$

(D) W:

3	7	-4	2
4	5	2	-3

Eq. param di W: $\begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$

(E) Provare che $W \oplus \mathrm{Im} f = \mathbb{R}^4$

So che $\dim W = \dim \mathrm{Im} f = 2$

$\Rightarrow$ Se provo che $W \cap \mathrm{Im} f = \{0\}$ deduco che

$W + \operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4 \Longrightarrow$ ok

$W \cap \operatorname{Ker} f$: Impongo che $\underbrace{t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}}_{\text{generico el. di } \operatorname{Im} f}$ stia in W, cioè

$$\begin{cases} 3(t+s) + 7(-2t+3s) - 4(2t-5s) \quad 2(t+4s) = 0 \\ 4(t+s) + 5(-2t+3s) + 2(2t-5s) - 3(t+4s) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -13t + 12s = 0 \\ -t - 3s = 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \Longrightarrow \text{soluz. unica } t = s = 0 \\ \Longrightarrow \cap = \{0\}. \end{array}$$

$\boxed{2}$ ②

$$E_h = \begin{pmatrix} 2-h \\ 1 \\ h \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} h+6 \\ 2h \\ 6-h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2h+h \\ 1-h \\ 2h \end{pmatrix} \right)$$

(A) $\dim E_h = ?$ Tipicamente E_h avrà dimensione $m_1 = 2$ tranne se i due vettori che generano le giaciture sono lin. dip.; ciò accadrà per un certo valore h_0 di h per il quale la dimensione sarà $m_0 = 1$ –

Devo stabilire per quale h_0

$$\begin{pmatrix} h+6 \\ 2h \\ 6-h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2h+4 \\ 1-h \\ 2h \end{pmatrix}$$

sono lin. dip.

ovvero: tutti i 3 det 2×2 sono nulli –

$$\det\begin{pmatrix} II \\ III \end{pmatrix} = 4h^2 - 6 + 6h + h - h^2 = 3h^2 + 7h - 6$$

$$\Delta = 49 + 72 = 121 = 11^2$$

Nullo per $h = \frac{-7 \pm 11}{6} = \begin{cases} 2/3 \\ -3 \end{cases}$

Per $h \neq 2/3, -3$ lin. indip.

$h = 2/3$: $\begin{pmatrix} 20/3 \\ 4/3 \\ 16/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 16/3 \\ 1/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$ lin. indip

$h = -3$: $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ lin. dip.

$\Rightarrow h_0 = -3$

(B) $F_k : \begin{cases} kx + (k-1)y + (3-k)z = 1+4k \\ (2+k)x + (1-k)y + 4kz = 2-k \end{cases}$

$\dim F_k = ?$ Tipicamente avremo dim $n_1 = 1$ tranne per un valore k_0 di k per cui le equaz. sono lin. dip. e avremo dimensione $n_0 = 2$

Trovo k_0 imponendo che un det 2×2 della matrice sia 0 e poi sostituendo:

$$\det\begin{pmatrix} \mathrm{I} & \mathrm{II} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} k & k-1 \\ 2+k & 1-k \end{pmatrix}$$
$$= (k-1)\det\begin{pmatrix} k & 1 \\ 2+k & -1 \end{pmatrix} = (k-1)(-2-2k)$$

$\dim = 2$ per $k \neq 1, -1$;

$k = 1$: $\begin{cases} x + 2z = 5 \\ 3x + 4z = 1 \end{cases}$ $\quad \dim = 1$

$k = -1$: $\begin{cases} -x - 2y + 4z = -3 \\ x + 2y - 4z = 3 \end{cases}$ $\quad \dim = 2$

$k_0 = -1$.

$\boxed{7}$ (1) Considerare per $k \in \mathbb{R}$ le $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ lin. t.c.

$$f\underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{v_1} = \underbrace{\begin{pmatrix} k-2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{w_1} \qquad f\underbrace{\begin{pmatrix} -k \\ 2 \\ 4-k \end{pmatrix}}_{v_2} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ k \end{pmatrix}}_{w_2} \qquad f\underbrace{\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ k+4 \end{pmatrix}}_{v_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1-2k \end{pmatrix}}_{w_3}$$

(A) Quante sono?

Se (v_1, v_2, v_3) è base di $\mathbb{R}^3$ allora f esiste unica

(risultato teorico).

Ci saranno certi valori di k per cui non sono una base, dunque (assumendo che v_1 e v_2 siano lin. indip) avremo $v_3 = \alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2$.
Allora ci sono due casi:

$w_3 \overset{?}{=} \alpha \cdot w_1 + \beta \cdot w_2$

- No: Se f esistesse avrei $f(v_3) = w_3$ (ipotesi) ma
  $f(v_3) = f(\alpha v_1 + \beta v_2) =$
  $= \alpha f(v_1) + \beta f(v_2) = \alpha w_1 + \beta w_2 \neq w_3$
  $\Longrightarrow f$ non esiste

- Sì: Per quanto appena detto la condiz. $f(v_3) = w_3$ discende da $f(v_1) = w_1$ e $f(v_2) = w_2$.
  Completando v_1, v_2 a base v_1, v_2, v di $\mathbb{R}^3$ posso scegliere $f(v)$ come voglio

$\Longrightarrow$ esistono infinite f

Per noi:

$$\det(v_1, v_2, v_3) = \det\begin{pmatrix} 2 & -k & 7 \\ -1 & 2 & -4 \\ 4 & 4-k & k+4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 0 & 4-k & -1 \\ -1 & \cdot & \cdot \\ 0 & 12-k & k-12 \end{pmatrix}$$

$$= (k-12)\cdot\det\begin{pmatrix} 4-k & -'' \\ -1 & '' \end{pmatrix}$$

$$= (k-12)(3-k)$$

Per $k \neq 3, 12$ la f esiste unica:

$k = 3$

$$\underset{v_1}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_2}{\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{v_3 = 2v_1 - v_2}{\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{w_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \quad \underset{w_2}{\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}} \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$w_3 \neq 2w_1 - w_2$

Sì $\Longrightarrow$ esistono infinite f.

$k = 12$

$$\begin{array}{ccc} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -12 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 16 \end{pmatrix} \\ r_1 & r_2 & r_3 = \underbrace{\frac{17}{4} r_1 + \frac{1}{8} r_2}_{\text{ho trovato i coeff. facendo i conti}} \end{array}$$

$$w_3 \neq \frac{17}{4} w_1 + \frac{1}{8} w_2$$

No

Non esiste alcuna f.