UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/7/13 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ trovare $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = 4$, che $\det(A) = 11$ e che $p_A(2) = -9$.

2. Trovare per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 7-5k & 10k-8 \\ 4-3k & 6k-5 \end{pmatrix}$ non è diagonalizzabile.

3. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitari e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix}$.

4. Trovare per quali $z \in \mathbb{C}$ la matrice $\begin{pmatrix} 3-2i & 1-4i \\ 1+4i & z \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori.

5. Stabilire se la conica $2x^2 - 5xy + 4y^2 - 7x + 2y + 1 = 0$
sia non degenere e determinarne il tipo affine.

6. Trovare l'intersezione del luogo $\{[t+1 : t-2 : t+3] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \ t \in \mathbb{R}\}$
con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $x^2 - 2xy + 2yz - 6x + 1 = 0$.

7. Calcolare $\int_Q y \cdot e^{xy} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$ dove $Q = [0,1] \times [0,1]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/7/13 — Esercizî

1. Considerare $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ e $X = \{x \in \mathbb{R}^3 : \ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$, e definire B come la matrice della proiezione ortogonale su X

(A) (3 punti) Esibire B.

(B) (3 punti) Sapendo che A ha autovalore 2 provare che un autovettore relativo a 2 appartiene a X.

(C) (3 punti) Dedurre dal punto precedente che $A + B$ ha l'autovalore 3.

(D) (3 punti) Trovare gli autovalori di A e una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ che la diagonalizza.

2. Considerare la conica $\mathcal{C}: \ 3x^2 + 2xy - 4x - 2y = 0$ e la curva $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 1 + e^{-t} \\ \frac{1}{2}e^t - \frac{3}{2}e^{-t} - 1 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Classificare $\mathcal{C}$ a meno di trasformazioni affini.

(B) (3 punti) Provare che l'immagine di α è contenuta in $\mathcal{C}$.

(C) (3 punti) Calcolare la curvatura di α in $t = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta 4y \, \mathrm{d}x$ dove β è la restrizione di α a $[0, 1]$.

Risposte

5. ♢

1. $t^3 - 4t^2 + 5t - 11$

2. $k = 4$

3. $\frac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 3+i \\ 2i-1 \end{pmatrix}$ con $\vartheta \in \mathbb{R}$

4. $t - 2i$ con $t \in \mathbb{R}$

5. Ellisse

6. $[2 : -1; 4]$ e $[6 : 9 : 4]$

7. $e - 2$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $B = \frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 2 & -6 \\ 2 & 13 & 3 \\ -6 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

(B) $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $(A+B)\cdot v = A\cdot v + B\cdot v = 2v + v = 3v$

(D) $\lambda_1 = -1, \quad \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = 3$

$v_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

2.

(A) Iperbole

(B) Sostituendo le componenti di α nell'equazione si trova un'indentità.

(C) $-\frac{1}{5\sqrt{5}}$

(D) $5 - 4e^{-1} - 3e^{-2}$