UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/2/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Calcolare $\int_\alpha (2x^2y\,\mathrm{d}x - xy^2\,\mathrm{d}y)$ con $\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2t+1 \\ 1-3t \end{pmatrix}$ per $t \in [0,1]$.

2. Per quali $t \in \mathbb{R}$ è chiusa la forma $(\cos(xy) - y(x+y^2)\sin(xy))\,\mathrm{d}x + (ty\cos(xy) - x(x+y^2)\sin(xy))\,\mathrm{d}y$?

3. Calcolare la curvatura di $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t + \ln(1+t) \\ \cos(t) - 3t \end{pmatrix}$ nel punto $t = 0$.

4. In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ trovare i punti di intersezione della retta $\{[x_0 : x_1 : x_2] :\ x_0 = 2x_1 + x_2\}$ con il luogo $\{[t+1 : t^2-5 : t^2+1] :\ t \in \mathbb{R}\}$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica di equazione $10x^2+5y^2+10z^2+2xy-14yz+8x-2y+1=0$.

6. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} -1 & k^2-4 \\ -k-2 & k^2+k-3 \end{pmatrix}$ ha autovalori uguali tra loro? Per quali $k \in \mathbb{R}$ non è diagonalizzabile?

7. Determinare $a \in \mathbb{R}$ tale che esista $M \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ invertibile con
$$M \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & -10 \\ -7 & 10 & 0 \end{pmatrix} \cdot M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/2/13 — Esercizî

1. Al variare di $s \in \mathbb{R}$ considerare $M_s = \begin{pmatrix} 1 & s+2 & 1 & 0 \\ s^2 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.

(A) (3 punti) Provare che esistono esattamente due valori s_0 e s_1 di s, con $s_0 < s_1$, per i quali l'applicazione bilineare $f_s(x, y) = {}^{\mathrm{t}}x \cdot M_s \cdot y$ è simmetrica.

(B) (3 punti) Provare che f_{s_0} è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^4$.

(C) (3 punti) Trovare una base del sottospazio ortogonale a $\mathrm{Span}(e_1 - e_2, e_3 + e_4)$ rispetto a f_{s_0}.

(D) (3 punti) Determinare il tipo affine della quadrica associata a M_{s_1}.

2. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare $M_k = \begin{pmatrix} k^2-5 & k+2 & k+2 \\ k+1 & 2k-1 & 1 \\ -k-1 & 2-k & k \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(M_k) = 2k^4 - 12k^2 + 10$.

(B) (2 punti) Trovare il polinomio caratteristico di M_k sapendo che vale $-2k^4 + 3k^3 + 12k^2 - 18k$ nel punto 1.

(C) (3 punti) Sapendo che M_k ha sempre l'autovalore $\lambda_1 = k + 1$ trovare gli altri.

(D) (2 punti) Stabilire per quali k la M_k ha autovalori con molteplicità algebrica maggiore di 1.

(E) (3 punti) Stabilire per quali k la M_k non è diagonalizzabile.

Risposte

5. ♢

1. $-\frac{55}{6}$

2. $t = 2$

3. $-5 \cdot 13^{-3/2}$

4. $[3 : -1 : 5]$ e $[3 : 10 : -17]$

5. Paraboloide ellittico

6. $k = -2$ e $k = 3$; $k = 3$

7. $a = \pm 3\sqrt{17}$

---

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni

1.

(A) $s_0 = -1$, $s_1 = 2$

(B) $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 1$

(C) $(7e_1 + 5e_2 + e_3,\ 23e_1 + 16e_2 + e_4)$

(D) Iperboloide a due falde

2.

(A) Sottrarre la seconda colonna alla terza; raccogliere $2(k-1)$ dalla terza colonna; sommare la seconda riga alla terza; si trova allora $2(k-1)(k+1)(k^2-5) = 2k^4 - 12k^2 + 10$

(B) $t^3 - (k^2 + 3k - 6)\, t^2 + (3k^3 + k^2 - 15k + 3)\, t - 2(k^4 - 6k^2 + 5)$

(C) $\lambda_2 = k^2 - 5$, $\lambda_3 = 2k - 2$.

(D) $k = -1$, $k = -2$, $k = 3$

(E) $k = 3$