UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/2/14 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** _ _ _ _ _ _

1. Determinare gli autovalori di $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = 1$ e $\det(A) = 1 - i$.

2. Quali sono i punti all'infinito in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dell'insieme $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; x^4 = y^4 + 1\}$?

3. Determinare tutti i vettori di $\mathbb{C}^3$ unitarî, ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \\ 1-3i \end{pmatrix}$,
con prima coordinata reale e somma delle coordinate nulla.

4. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 1-t^{19} & t-1 \\ t^2-5t+7 & e^{\pi t} \end{pmatrix}$ ammette una base ortonormale di autovettori?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $3x^2 + 2y^2 + 8z^2 + 8xz + 4yz + 2x = 0$.

6. Per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 2k+2 & k-1 \\ k^2+k-2 & k^2+2k+1 \end{pmatrix}$?

7. Calcolare $\int_\alpha \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$ dove $\alpha : [-2, 2] \to \mathbb{R}^2$ è data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^4 - 4t^2 + 1 \\ \sin(\pi \cdot t) \end{pmatrix}$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 15/2/14 — Esercizî

1. Considerare $X = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 9 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 17 \\ 6 \\ -16 \end{pmatrix}\right) \subset \mathbb{R}^3$ e $A = \begin{pmatrix} 7 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & -1 \end{pmatrix}$.

(A) (4 punti) Esibire la matrice della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su X.

(B) (4 punti) Provare che l'espressione $f(x) = A \cdot x$ definisce un'applicazione lineare $f : X \to X$.

(C) (4 punti) Stabilire se f sia diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t + 2\cos(t) \\ 3t^2 + \sin(t) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è regolare.

(B) (3 punti) Calcolare la curvatura di α in $t = 0$.

(C) (3 punti) Provare che per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$ esistono t_+ e t_- in $\mathbb{R}$ tali che $t_+ > t_0$, $t_- > t_0$ e la curvatura di α è positiva in t_+ e negativa in t_-.

(D) (4 punti) Calcolare $\int_\beta x \, \mathrm{d}y$ dove β è la restrizione di α a $[0, \pi]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $1+i$ e $-i$

2. $[\pm 1 : 1; 0]$

3. $\pm\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix} 4 \\ -2-i \\ -2+i \end{pmatrix}$

4. $t=2$ e $t=4$

5. Ellissoide

6. $k \neq -3$

7. 4π

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) $\frac{1}{14}\begin{pmatrix} 10 & 6 & -2 \\ 6 & 5 & 3 \\ -2 & 3 & 13 \end{pmatrix}$

(B) X ha equazione $\omega \cdot x = 0$ con $\omega = (2, -3, 1)$ e $\omega \cdot A = 3\omega$

(C) Rispetto alla base $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ si ha $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; questa matrice ha autovalore 3 doppio, ma non è 3 volte l'identità, dunque f non è diagonalizzabile

2.

(A) La prima componente di $\alpha'(t)$ si annulla per $t = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ e per $t = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, e per tali valori di t la seconda componente di $\alpha'(t)$ non si annulla

(B) $2\sqrt{2}$.

(C) La curvatura di α nel punto t ha il segno di $12t\cos(t) - 13\sin(t) + 8$, dunque è positiva per $t = 2k\pi$ con $k > 0$, ed è negativa per $t = (2k+1)\pi$ con $k \geq 0$

(D) $2\pi^3 + \pi - 26$