UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 8/1/13 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Per quali $k \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 2k-1 & k-1 \\ k^2-2k+1 & k^2-k+1 \end{pmatrix}$ è diagonalizzabile?

2. Trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitarî, aventi somma delle coordinate immaginaria pura e ortogonali al vettore $(1+i)e_1 + (2-i)e_2$.

3. Una matrice ortogonale 2×2 che non sia una rotazione è necessariamente diagonalizzabile? Spiegare.

4. Se A è una matrice 3×3, che legame c'è tra $p_{(5A)}(t)$ e $p_A\left(\frac{t}{5}\right)$?

5. Determinare il tipo affine della quadrica $2x^2+5y^2+10z^2-4xy-6xz-2yz-6x+2y+12z+15=0$.

6. Determinare l'intersezione di $\{[2+t : -t : 5+4t] : \ t\in\mathbb{R}\}$ con l'insieme dei punti all'infinito della quadrica $2x^2+2xy-3yz-z^2+7y-5z+1=0$.

7. Calcolare $\int_\alpha \cos(xy)\cdot(y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ dove $\alpha(t) = (1+t, \pi t)$ per $t\in\left[-\frac{1}{2}, 1\right]$.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 8/1/13 — Esercizî

1. Al variare di $k \in \mathbb{R}$ considerare la matrice $A(k) = \begin{pmatrix} 0 & k^2-k+1 & -k^2+2k-3 \\ 2-2k & k^2+2k-1 & -2k-2 \\ 1-k & k+1 & k^2-k-4 \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che $\det(A(k)) = k^5 - k^4 - 4k^3 + 4k^2 + 3k - 3$.

(B) (2 punti) Sapendo che $p_{A(k)}(1) = -k^5 + 2k^4 + 6k^3 - 12k^2 - 8k + 16$ determinare $p_{A(k)}(t)$.

(C) (2 punti) Sapendo che $A(k)$ ha sempre gli autovalori $\lambda_1 = k-1$ e $\lambda_2 = k^2 - 3$ trovare l'altro autovalore.

(D) (3 punti) Stabilire per quali k la matrice $A(k)$ ha autovalori con molteplicità algebrica maggiore di 1.

(E) (3 punti) Stabilire per quali k la matrice $A(k)$ non è diagonalizzabile.

2. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t \cdot e^t \\ t + \cos(t) \\ t^2 + \sin(t) \end{pmatrix}$ e la sua restrizione β a $[0, \pi]$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (4 punti) Calcolare curvatura e torsione di α in $t = 0$.

(C) (3 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α in $t = 0$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta y \, \mathrm{d}z$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si può usare anche un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

Risposte

5. $\diamondsuit$

1. $k \neq 0$

2. $\pm\frac{1}{\sqrt{35}}\begin{pmatrix} 3+4i \\ i-3 \end{pmatrix}$

3. Sì, ha autovalori ± 1

4. $p_{(5A)}(t) = 125 \cdot p_A\left(\frac{t}{5}\right)$

5. Insieme vuoto

6. I punti $[1:1:1]$ e $[9:-17:48]$

7. $\frac{1}{\sqrt{2}}$

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Soluzioni

1.

(A) Sostituendo alla seconda riga sé stessa meno due volte la terza si ottiene $\det(A(k)) = (k-1)(k^4 - 2k^2+3)$, da cui la conclusione

(B) $t^3 - (2k^2+k-5)t^2 + (k^4+2k^3-6k^2-4k+7)t - (k^5-k^4-4k^3+4k^2+3k-3)$

(C) $\lambda_3 = k^2 - 1$

(D) $k=-1$, $k=0$, $k=1$, $k=2$

(E) $k=-1$, $k=0$

2.

(A) Le componenti di α sono derivabili infinite volte; la seconda è iniettiva; la prima ha derivata nulla solo nel punto $t=-1$, nel quale la seconda ha derivata non nulla

(B) $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\tau = \frac{2}{3}$

(C) $\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

(D) $\frac{2}{3}\pi^3 + \frac{\pi}{2} - 6$