Esercizî di Geometria (Petronio 10/11)

29 marzo 2011

Esercizio 1. Dati $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^n$ sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ con $a_{ij} = \langle v_i | v_j \rangle_{\mathbb{R}^n}$. In quali ipotesi su $v_1, \ldots, v_n$ si ha che $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$?

Esercizio 2. Determinare la matrice $A \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$ associata rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo alla proiezione ortogonale p di $\mathbb{R}^4$ su $W = \mathrm{Span}(e_1 - e_2 + e_3 + 2e_4, e_1 + e_2 + 2e_3 - e_4)$, verificando che ${}^{\mathrm{t}}A = A^2 = A$.

Esercizio 3. Data $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che ${}^{\mathrm{t}}M \cdot M$ sia diagonale invertibile, determinare quante sono le matrici diagonali D tali che $M \cdot D$ è una matrice ortogonale.

Esercizio 4. In $\mathbb{R}^4$ determinare una base ortogonale del sottospazio ortogonale a $\mathrm{Span}(3e_1 + e_2 - 5e_3 + 2e_4, -2e_1 + 4e_2 + 3e_3 - e_4)$.

Esercizio 5. In $\mathbb{C}^2$ considerare il prodotto scalare hermitiano standard. Determinare i vettori unitarî, con seconda componente immaginaria pura e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$.

Esercizio 6. In $\mathbb{C}^3$ considerare il prodotto scalare hermitiano standard. Determinare i vettori unitarî, con seconda componente reale, somma delle componenti nulla e ortogonali a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$.

Esercizio 7. Determinare la matrice $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ associata rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo alla proiezione ortogonale p di $\mathbb{C}^2$ sul generato di $(2+i)e_1 + (1-3i)e_2$, verificando che $A^* = A^2 = A$.

Esercizio 8. In $\mathbb{C}^2$ ortonormalizzare la base $\left(\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} \right)$.

Esercizio 9. In $\mathbb{C}^3$ calcolare la proiezione ortogonale di $\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix}$ sul generato W di $\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$.

Esercizio 10. Al variare di $k \in \mathbb{C}$ considerare $A_k = \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & k \end{pmatrix}$ e la forma sesquilineare f_k su $\mathbb{C}^2$ associata ad A_k.

(a) Stabilire per quali k la f_k è hermitiana.

(b) Stabilire per quali k la f_k è hermitiana e definita positiva, verificando che ciò accade per $k = 3$.

(c) Trovare un vettore di $\mathbb{C}^2$ con prima componente immaginaria pura che rispetto a f_3 sia unitario e ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$.

(d) Calcolare la proiezione ortogonale rispetto a f_3 di $\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ sul generato di $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$.

(e) Ortonormalizzare rispetto a f_3 la base data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 2 \\ i \end{pmatrix}$.

Soluzione 1. A è sempre simmetrica, dunque bisogna solo vedere quando $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è definita positiva. Posto $X = (v_1 \ \cdots \ v_n)$ si ha $A = {}^{\mathrm{t}}X \cdot X$, dunque per ogni $v \in \mathbb{R}^n$ si ha $\langle v|v\rangle_A = {}^{\mathrm{t}}v \cdot {}^{\mathrm{t}}X \cdot X \cdot v = {}^{\mathrm{t}}(X \cdot v) \cdot (X \cdot v) = \|X \cdot v\|^2_{\mathbb{R}^n}$, da cui segue che $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ è definita positiva se e solo se X è invertibile, ovvero se e solo se $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base di $\mathbb{R}^n$.

Soluzione 2. I vettori assegnati costituiscono una base ortogonale di W ed entrambi hanno norma $\sqrt{7}$, dunque

$$p(x) = \frac{x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_3 + x_4 \\ 2x_2 + x_3 - 3x_4 \\ 3x_1 + x_2 + 5x_3 \\ x_1 - 3x_2 + 5x_4 \end{pmatrix}$$

da cui segue che

$$A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

e le verifiche sono immediate.

Soluzione 3. Se $M = (v_1 \ \cdots \ v_n)$ l'ipotesi significa che $(v_1, \ldots, v_n)$ è una base ortogonale di $\mathbb{R}^n$. Inoltre se D ha coefficienti $k_1, \ldots, k_n$ sulla diagonale si ha $M \cdot D = (k_1 \cdot v_1 \ \cdots \ k_n \cdot v_n)$ e la condizione da realizzare è che $(k_1 \cdot v_1, \ldots, k_n \cdot v_n)$ sia una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$, dunque per ogni j le uniche scelte possibili sono $k_j = \pm\frac{1}{\|v_j\|}$, pertanto ci sono 2^n possibili D.

Soluzione 4. Basta trovare una base e poi ortogonalizzarla. Per trovare una base basta cercarne una con il primo vettore avente quarta componente nulla, che si trova calcolando il prodotto vettoriale alle prime tre componenti dei vettori dati, e con il secondo avente prima componente nulla, che si trova calcolando il prodotto vettoriale alle ultime tre componenti dei vettori dati:

$$\begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}.$$

Ora il primo vettore si tiene e il secondo si sostituisce con

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix} - \frac{125}{726} \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} = \ldots$$

Soluzione 5. Trovato il vettore del tipo $\begin{pmatrix} z \\ i \end{pmatrix}$ ortogonale a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$ si tratta di prendere il suo normalizzato e l'opposto di quest'ultimo. Bisogna imporre $(2+i)z + (1-3i)i = 0$, da cui $z = \frac{1}{5}(i-7)$, e i vettori cercati sono $\pm \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i-7 \\ 5i \end{pmatrix}$.

Soluzione 6. Trovato il vettore del tipo $\begin{pmatrix} z \\ 1 \\ -1-z \end{pmatrix}$ ortogonale a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ si tratta di prendere il suo normalizzato e l'opposto di quest'ultimo. Bisogna imporre $(1-i)z + (2+i) + (1-2i)(-1-z) = 0$, da cui $z = i-3$, e i vettori cercati sono $\pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i-3 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}$.

Soluzione 7.

$$p(z) = \frac{(2-i)z_1 + (1+3i)z_2}{15} \cdot \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix} = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -1+7i \\ -1-7i & 10 \end{pmatrix} \cdot z$$

dunque

$$A = \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -1+7i \\ -1-7i & 10 \end{pmatrix}$$

e le verifiche sono immediate.

Soluzione 8.

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} \\ \widetilde{w_2} &= \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{(3-i)(1-i)+2i(-2)}{6}\cdot\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} = \ldots = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \\ w_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Soluzione 9. L'ortogonale a W è generato dal coniugato di $\begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ i \end{pmatrix}$, dunque da $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix}$, e allora la proiezione cercata è

$$\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{(2+i)(1+i)+i}{5}\cdot\begin{pmatrix} 1-i \\ 1-i \\ i \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5-3i \\ 2i-5 \\ -1-i \end{pmatrix}.$$

Soluzione 10.

(a) Per $k \in \mathbb{R}$.

(b) $f_3(z,z) = 2|z_1|^2 + 2\Re\left(i\sqrt{3}\,\overline{z_1}z_2\right) + k|z_2|^2 \geq 2|z_1|^2 - 2\sqrt{3}\,|z_1|\cdot|z_2| + k|z_2|^2$ (e per ogni valore di $|z_1|$ e $|z_2|$ si possono scegliere gli argomenti in modo che valga l'uguaglianza). Dividendo per $|z_2|$ si trova in $t = |z_1/z_2|$ un polinomio con $\Delta/4 = 3-2k$. Dunque se $k > 3/2$ la f_k è definita positiva, altrimenti non lo è.

(c) Imponendo che $\begin{pmatrix} i \\ z \end{pmatrix}$ sia ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$ rispetto a f_3, cioè che $(1+i\ \ 1-i)\cdot A_3\cdot\begin{pmatrix} i \\ z \end{pmatrix} = 0$, si ottiene $z = \frac{1}{6}\left(3-\sqrt{3}\right)$. Ora posto $w = \begin{pmatrix} 6i \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$ si ha $f_3(w,w) = 72 + 18\sqrt{3}$, dunque i vettori cercati sono $\pm\frac{1}{3\sqrt{8+2\sqrt{3}}}\begin{pmatrix} 6i \\ 3-\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

(d) Posto $v = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ e $w = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ si ha $f_3(v,v) = 5-2\sqrt{3}$ e $f_3(w,v) = -i$, dunque $p_v(w) = -\frac{i}{5-2\sqrt{3}}v$.

(e) Detti v_1 e v_2 i vettori dati si ha $f_3(v_1,v_1) = 5+2\sqrt{3}$ e $f_3(v_2,v_1) = 1+\sqrt{3}$, dunque $w_1 = \frac{1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}v_1$ e

$$\widetilde{w_2} = v_2 - \frac{1+\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}v_1 = \frac{3}{5+2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right) i \end{pmatrix}.$$

Ora posto $\widetilde{\widetilde{w_2}} = \begin{pmatrix} 3+\sqrt{3} \\ \left(2+\sqrt{3}\right) i \end{pmatrix}$ si ha $f_3\left(\widetilde{\widetilde{w_2}}, \widetilde{\widetilde{w_2}}\right) = 3$, dunque $w_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\widetilde{\widetilde{w_2}}$.