Esercizî di Geometria (Petronio 09/10)

23 marzo 2010

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale complesso V con il prodotto scalare hermitiano assegnato trovare tutti i vettori v con le proprietà indicate:

(a) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$, con prima coordinata reale

(b) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$, con somma delle coordinate immaginaria pura

(c) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{pmatrix}$, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix}$, con prima coordinata reale

(d) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 7 \end{pmatrix}$, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$, con somma delle coordinate immaginaria pura

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 2 \\ 1+i \\ 3-i \end{pmatrix}$ e a $\begin{pmatrix} 3+i \\ -2i \\ 1-i \end{pmatrix}$ con somma delle coordinate reale

(f) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, v unitario, ortogonale a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2 \\ 3-i \end{pmatrix}$ e a $\begin{pmatrix} 3+i \\ 1-i \\ -2i \end{pmatrix}$, con terza coordinata immaginaria pura

(g) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 3 & -2i \\ 0 & 2i & 5 \end{pmatrix}$, v unitario, ortogonale a $e_1 + ie_3$ e a $2e_2 - ie_3$, con seconda coordinata reale

(h) $V = \mathbb{C}_{\leq 1}[z]$, $\langle p(z)|q(z)\rangle = p(1) \cdot \overline{q(1)} + p(i) \cdot \overline{q(i)}$, v unitario, ortogonale a $i + (2-i)z$, con valore reale in $z = -i$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale complesso V con il prodotto scalare hermitiano $\langle\cdot|\cdot\rangle$ assegnato esibire la proiezione ortogonale sul sottospazio W indicato, verificando che è autoaggiunta rispetto a $\langle\cdot|\cdot\rangle$ e che ha quadrato uguale a se stessa:

(a) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}\right)$

(b) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \{z \in \mathbb{C}^2 : (1-i)z_1 + (2+i)z_2 = 0\}$

(c) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \\ 3-2i \end{pmatrix}\right)$

(d) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \{z \in \mathbb{C}^3 : iz_1 + (1-2i)z_2 + (3+i)z_3 = 0\}$

(e) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -4 \\ 3-i \end{pmatrix}\right)$

(f) $V = \mathbb{C}^3$, $\langle\cdot|\cdot\rangle$ standard,
$W = \{z \in \mathbb{C}^3 : z_1 + 2z_2 + iz_3 = 0,\ (2-i)z_1 + 2iz_2 - z_3 = 0\}$

(g) $V = \mathbb{C}^2$, $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$, $W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}\right)$

(h) $V = \mathbb{C}_{\leq 1}[z], \quad \langle p(z) | q(z) \rangle = p(2) \cdot \overline{q(2)} + 2p(-i) \cdot \overline{q(-i)},$
$W = \operatorname{Span}(1 - 2i + (3+i)z).$

Esercizio 3. Determinare gli autovalori dell'applicazione lineare f assegnata o dell'applicazione lineare associata alla matrice A assegnata:

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1+i & -\frac{1}{5}(7+i) \\ 2-i & 3 \end{pmatrix}$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(f) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(g) $f : V \to V, \quad V = \{x \in \mathbb{R}^3 : \; x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\},$
$f(x) = \begin{pmatrix} -3x_1 - x_2 + 2x_3 \\ x_1 - 3x_2 - 4x_3 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \end{pmatrix}$

(h) $f : V \to V, \quad V = \mathbb{R}_{\leq 1}[t], \quad f(p(t)) = p(3) + p(-2) \cdot t$

(i) $f : V \to V, \quad V = \{p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : \; p(1) = 0\},$
$f(p(t)) = (t-1) \cdot p'(t) + (t^2 - 1) \cdot p(-2)$