Esercizî di Geometria (Petronio 09/10)

12 marzo 2010

Esercizio 1. Provare che le funzioni $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ date da

$$\mathrm{SNCF}(x,y) = \begin{cases} \|x-y\| & \text{se } x \text{ e } y \text{ sono linearmente dipendenti} \\ \|x\| + \|y\| & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$\mathrm{NYC}(x,y) = \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|$$

soddisfano le tre proprietà delle funzioni distanza. Spiegare inoltre perché si chiamano come si chiamano.

Esercizio 2. Nello spazio V con il prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$ assegnato ortonormalizzare il sistema di vettori dato:

(a) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ -1789 \end{pmatrix}$

(b) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$

(d) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(e) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot x \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$

(f) $V = C^0([0,1],\mathbb{R}) \qquad \langle f|g\rangle = \int\limits_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \qquad u(t) = t - 2t^2,\ v(t) = t$

(g) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \qquad \langle p(t)|q(t)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2)$
$u(t) = t - 2t^2,\ v(t) = t$

Esercizio 3. Nello spazio V con il prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle$ assegnato esibire la proiezione ortogonale sul sottospazio W indicato:

(a) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y\cdot x \qquad W = \{x:\ 4x_1 - 3x_2 = 0\}$

(b) $V = \mathbb{R}^2 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y\cdot\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\cdot x \qquad W = \{x:\ 4x_1 - 3x_2 = 0\}$

(c) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y\cdot x \qquad W = \{x:\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$

(d) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y\cdot x \qquad W = \{x:\ 3x_1 + 2x_2 = 3x_2 - 5x_3 = 0\}$

(e) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot x$
$W = \{x:\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0\}$

(f) $V = \mathbb{R}^3 \qquad \langle x|y\rangle = {}^{\mathrm{t}}y\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\cdot x$
$W = \{x:\ 3x_1 + 2x_2 = 3x_2 - 5x_3 = 0\}$

(g) $V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t] \qquad \langle p(t)|q(t)\rangle = p(-1)\cdot q(-1) + p(1)\cdot q(1) + p(2)\cdot q(2)$
$W = \mathrm{Span}(t, t^2)$

Esercizio 4. Trovare tutte le matrici X che definiscono applicazioni autoaggiunte rispetto al prodotto scalare $\langle\cdot|\cdot\rangle_A$ con A assegnata e che soddisfano le ulteriori richieste eventualmente indicate:

(a) $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \qquad X\cdot\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{tr}(X) = 0 \qquad {}^{\mathrm{t}}X = X$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad {}^{\mathrm{t}}X + X = 0$

Esercizio 5. Sullo spazio $\mathbb{R}^3$ considerare il prodotto scalare standard. Esibire la matrice che rappresenta la trasformazione descritta e verificare che è ortogonale:

(a) La riflessione f rispetto al piano di equazione $2x - 3y + 4z = 0$

(b) Una delle due rotazioni g di angolo $\frac{\pi}{6}$ intorno a $\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(c) $f \circ g$

(d) $g \circ f$