Esercizî di Geometria (Petronio 09/10)

7 aprile 2010

Esercizio 1. Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$, sia $f : V \to V$ un'applicazione lineare e $W \subset V$ un sottospazio vettoriale tale che $f(W) \subseteq W$. Sia $g : W \to W$ l'applicazione lineare data da $g(w) = f(w)$ per ogni $w \in W$. Provare che il polinomio caratteristico di f è multiplo di quello di g.

Esercizio 2. Siano V uno spazio vettoriale di dimensione finita su $\mathbb{K}$ e $f : V \to V$ un'applicazione lineare tale che $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$. Determinare quali $\lambda \in \mathbb{K}$ possono essere autovalori di una tale f, e descrivere tutte le f siffatte che sono diagonalizzabili.

Esercizio 3. Determinare per quali $n \in \mathbb{N}$ si ha che qualsiasi matrice $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ ha almeno un autovalore reale.

Esercizio 4. Stabilire che legame intercorre tra la diagonalizzabilità su $\mathbb{K}$ di $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ e della sua trasposta ${}^{\mathrm{t}}A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$.

Esercizio 5. Sia $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ tale che il polinomio caratteristico $p_A(t)$ ha n radici reali (contate con la molteplicità), e diagonalizzabile come matrice complessa, cioè tale che esiste $M \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{C})$ invertibile tale che $M^{-1} \cdot A \cdot M$ è diagonale. Provare che A è diagonalizzabile come matrice reale.

Esercizio 6. Sia $A \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ con tutti i coefficienti positivi. Provare che gli autovalori di A sono distinti e che A ha un autovettore con le coordinate concordi e uno con le coordinate discordi.

Esercizio 7. Discutere la diagonalizzabilità su $\mathbb{R}$ e su $\mathbb{C}$ della matrice assegnata, al variare del parametro k quando presente:

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(f) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(g) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(h) $\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(i) $\begin{pmatrix} 2k-1 & 2-k \\ 2k+1 & -k \end{pmatrix}$

(j) $\begin{pmatrix} 2-k & 3k-2 \\ 1 & 2k-1 \end{pmatrix}$

(k) $\begin{pmatrix} k+1 & 2 & 2k \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

(l) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

(m) $\begin{pmatrix} k^2 & 2(1-k) & k-1 \\ k+1 & -k-2 & 1 \\ 2(k+1) & -4(k+1) & k+2 \end{pmatrix}$

(n) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3k \\ 1 & 0 & 3k & 1 \end{pmatrix}$