



Esercizio 1. Sia Σ la superficie in \mathbb{R}^3 definita da

$$\Sigma = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z > 1\}.$$

Si considerino le funzioni v_1, v_2, v_3 date da

$$v_1(x, y, z) = x^2 + 2y(x - z) - z^2, \quad v_2(x, y, z) = (y + z) - (y + z)^2, \quad v_3(x, y, z) = (x - z)^2$$

e siano v e w i campi di vettori su \mathbb{R}^3 con le componenti seguenti:

$$v = (v_1, v_2, v_3), \quad w = (v_2 + v_3, v_3 - v_1, -v_2 - v_1).$$

- (A) [2 punti] Si calcoli l'area di Σ .
- (B) [2 punti] Si dica se i campi v e w siano tra loro ortogonali in ogni punto.
- (C) [5 punti] Scelta una orientazione per Σ , si calcoli il flusso¹ di v attraverso Σ .
- (D) [3 punti] Scelta una orientazione per Σ , si calcoli la circuitazione² di v lungo $\partial\Sigma$.
- (E) [3 punti] Scelta una orientazione per Σ , si calcoli la circuitazione di w lungo $\partial\Sigma$.

Esercizio 2. Siano x_k e y_k rispettivamente le soluzioni dei seguenti problemi di Cauchy:

$$\begin{cases} tx'_k = 2x_k \\ x_k(1) = k \end{cases} \quad \begin{cases} ty'_k = 2y_k \\ y_k(0) = k. \end{cases}$$

Al variare di $k \in \mathbb{R}$:

- (A) [5 punti] Si discutano esistenza e unicità locale di x_k .
- (B) [5 punti] Si discuta l'esistenza globale di x_k .
- (C) [5 punti] Si discutano esistenza e unicità locale di y_k .

¹(Flusso di v) = $\int_{\Sigma} \langle v | n \rangle$ con n normale a Σ

²(Circuitazione di v) = $\int_{\partial\Sigma} \langle v | \tau \rangle$ con τ tangente a $\partial\Sigma$

Esercizio 3. Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(t) = e^{-|t|}$$

e sia F la sua trasformata di Fourier. Sia C_r il bordo del disco di raggio r in \mathbb{C} e sia $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ la curva definita da

$$\gamma(t) = 2i \sin(t) + \sin(2t).$$

- (A) [4 punti] Si calcoli $F(x)$.
- (B) [3 punti] Si caratterizzino tutte le funzioni g meromorfe su \mathbb{C} che coincidono con F sull'asse reale.
- (C) [4 punti] Per ogni funzione g come in (B), si calcoli $\int_{\gamma} g(z) dz$.
- (D) [4 punti] Per ogni funzione g come in (B) e per ogni $r > 0$ si calcoli, se è definito, l'integrale $\int_{C_r} g(z) dz$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
