



Esercizio 1. Posto $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$, per ogni $t \in \mathbb{R}$ sia $h_t : D \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da:

$$h_t(x, y) = x^2 + txy - y^2.$$

Sia S_t il grafico di h_t , cioè $S_t = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, z = h_t(x, y)\}$, e sia $f(t)$ l'area di S_t . Sia inoltre ω la seguente 2-forma definita su \mathbb{R}^3 :

$$\omega(x, y, z) = \sqrt{|1 - x^2 - y^2|} dx dy$$

e sia $g(t) = \left| \int_{S_t} \omega \right|$.

- (A) [3 punti] Si dica se le funzioni $t \mapsto f(t)$ e $t \mapsto g(t)$ siano differenziabili.
- (B) [4 punti] Si calcolino
- $$\inf_{t \in \mathbb{R}} f(t) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} f(t) \quad \inf_{t \in \mathbb{R}} g(t) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} g(t).$$
- (C) [4 punti] Si dica se gli inf siano dei minimi.
- (D) [4 punti] Si dica se i sup siano dei massimi.

Esercizio 2.

- (A) [3 punti] Si trovino tutte le soluzioni $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale $x'' + x = 0$.
- (B) [4 punti] Si trovino tutte le soluzioni dell'equazione differenziale

$$x'' + x = \frac{\sin t}{(\cos t)^2}$$

che siano definite in un intorno di zero.

- (C) [4 punti] Si trovi la soluzione del seguente problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x = \frac{\sin t}{(\cos t)^2} \\ x(0) = 0 \\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

- (D) [4 punti] Si dica la soluzione del punto (C) sia definita globalmente su \mathbb{R} .

Esercizio 3. Sia $f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + c^2}$ con c reale positivo.

Siano $\Delta(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ e $\Delta^+(r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r, \Im(z) > 0\}$.

(A) [3 punti] Si trovino i poli e gli zeri di f , specificandone l'ordine.

(B) [4 punti] Si calcoli $\int_{\partial\Delta(r)} f(z) dz$ al variare di r in $(0, +\infty)$.

(C) [4 punti] Si calcoli $\int_{\partial\Delta^+(r)} f(z) dz$ al variare di r in $(0, +\infty)$.

(D) [4 punti] Si calcolino $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x^2 + c^2} dx$ e $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + c^2} dx$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti, una penna, ed un foglio manoscritto contenente enunciati e formule. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.
