UNIVERSITÀ DI PISA

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria delle Telecomunicazioni

Matematica III — Scritto del 16/2/02

Esercizio 1. Sia $n \geq 1$ un intero fissato. Si consideri la funzione meromorfa f_n definita come segue:

$$f_n(z) = \frac{1}{z^n + z^{n-1} + \ldots + z + 1}.$$

Sia inoltre definito per ogni $k \in \mathbb{Z}$ il punto $z_k = \mathrm{e}^{\frac{2k\pi i}{n+1}}$

(A) [4 punti] Si dimostri che i poli di f_n sono $z_1, \ldots, z_n$ e che sono tutti semplici.

(B) [3 punti] Si dimostri che $\sum_{k=0}^{n} z_k = 0$.

(C) [3 punti] Più in generale, si dimostri che $\sum_{k=0}^{n} z_k^m = 0$ per $m = 1, \ldots, n$.

(D) [6 punti] Si dimostri che il residuo di f_n in z_k è uguale a ciascuna delle seguenti tre espressioni:

$$\prod_{1 \leq j \leq n,\ j \neq k} (z_k - z_j)^{-1}, \qquad (z_k - 1) \cdot \prod_{j=1}^{n} (z_k - z_{k+j})^{-1}, \qquad z_k \cdot (z_k - 1) \cdot \prod_{j=1}^{n} (1 - z_j)^{-1}.$$

(E) [3 punti] Per $n = 1$ ed ogni $t > 1$ si calcoli $\int_{\partial \Delta_t} f_1(z)\, \mathrm{d}z$.

(F) [4 punti] Per $n \geq 2$ ed ogni $t > 1$ si dimostri che $\int_{\partial \Delta_t} f_n(z)\, \mathrm{d}z = 0$. [Sugg.: usare (D) e (C).]

Esercizio 2. Per $k \in \mathbb{R}$, sia x_k la soluzione del seguente problema di Cauchy (definita sull'intervallo massimo possibile):

$$\begin{cases} x' = x^2 - t^2 \\ x_k(0) = k \end{cases}$$

(A) [4 punti] Si dimostri che x_0 è definita su tutto $\mathbb{R}$.

(B) [3 punti] Si dimostri che se x_k è definita su (a, b) allora x_{-k} è definita su $(-b, -a)$ e vale l'uguaglianza $x_{-k}(t) = -x_k(-t)$ per ogni t in $(-b, -a)$.

(C) [4 punti] Si dimostri che per $k < 0$ la x_k è definita su $[0, +\infty)$ e che $\lim_{t \to +\infty} x_k(t) = -\infty$.

(D) [2 punti] Si dimostri che per $k > 0$ la x_k è definita su $(-\infty, 0]$ e che $\lim_{t \to -\infty} x_k(t) = +\infty$.

(E) [3 punti] Si dimostri che x_k è iniettiva se e solo se $k = 0$.

(F) [3 punti] Si dimostri che se x_k è definita su $[0, +\infty)$ e $h < k$ allora anche x_h è definita su $[0, +\infty)$.

(G) [3 punti] Si dimostri che per qualche k la x_k non è definita su tutto $\mathbb{R}$.