

Prova scritta n. 2

Analisi Matematica 2

Corso di Studi in Matematica

3 Luglio 2026

Esercizio 1. Si consideri la serie

$$S(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x \log n}{1 + n^2 x^4}.$$

- (a) Dimostrare che $S: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è ben definita (cioè la serie converge per ogni $x \in \mathbb{R}$);
- (b) dimostrare che S è continua in ogni punto $x \neq 0$;
- (c) dimostrare che S è derivabile in ogni punto $x \neq 0$;
- (d) dimostrare che S non è continua in $x = 0$.

Esercizio 2. Nello spazio di Banach $X = C([0, 1])$ dotato della norma uniforme $\|\cdot\|_\infty$, si consideri la mappa $T: X \rightarrow X$ definita da:

$$T(u)(x) = 1 + \int_0^x t u(t) dt.$$

- (a) dimostrare che T è una contrazione;
- (b) trovare l'unico punto fisso di T ;