ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 77 - 19.4.2023

Teorema delle contrazioni (Punto fisso di Banach-Caccioppoli).

Sia X uno spazio metrico completo, $X \neq \emptyset$

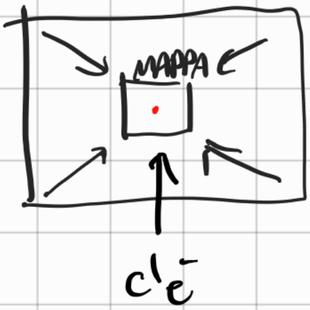
Sia

$T : X \to X$ tale che $\exists\, L < 1$:

$$\boxed{d(T(x),T(y)) \le L \cdot d(x,y)} \qquad \forall x, y \in X$$

Allora $\exists!\, \bar{x} \in X$ t.c. $T(\bar{x}) = \bar{x}$

Es. Se T è una omotetia di fattore $L < 1$



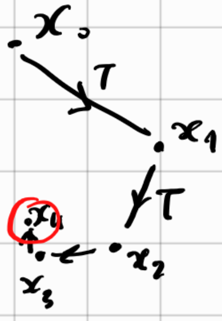
L = scala

dim X è completo: ogni successione di Cauchy converge:

x_n è di Cauchy: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall k, j > N : d(x_k, x_j) < \varepsilon$.

Scelgo $x_0 \in X$ qualunque. Definisco x_k per induzione:

$x_{k+1} = T(x_k)$



$$d(x_2, x_1) = d(T(x_1), T(x_0)) \leq L\, d(x_1, x_0)$$

$$d(x_3, x_2) = d(T(x_2), T(x_1)) \leq L\, d(x_2, x_1) \leq L^2 d(x_1, x_0)$$

$$\vdots$$

$$d(x_{k+1}, x_k) \leq L^k \cdot d(x_1, x_0)$$

Se $j > k$

$$d(x_k, x_j) \leq d(x_k, x_{k+1}) + d(x_{k+1}, x_{k+2}) + \dots + d(x_{j-1}, x_j)$$

$$= \sum_{i=k}^{j-1} d(x_i, x_{i+1}) \leq \sum_{i=k}^{j-1} L^i \cdot d(x_1, x_0) \left[= \frac{L^k - L^j}{1-L} d(x_1, x_0) \right]$$

$$\leq \sum_{i=k}^{+\infty} L^i d(x_1, x_0) = \frac{L^k}{1-L} \cdot d(x_1, x_0) \to 0$$

per $k \to +\infty$ ($L < 1$)

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N$ t.c. $\dfrac{L^N}{1-L} d(x_1, x_0) < \varepsilon$

e dunque se $k, j > N$, $j > k$, $d(x_k, x_j) \leq \varepsilon$

x_k è di Cauchy!

X è completo quindi $x_k \to \bar{x} \in X$.

(1) $\bar{x}$ è un punto fisso:

$$\begin{array}{ccc} x_{k+1} & = & T(x_k) \\ \downarrow & & \downarrow \ (*) \\ \bar{x} & = & T(\bar{x}) \end{array}$$

$(*)$ $d(T(x_k), T(\bar{x})) \leq L \cdot d(x_k, \bar{x}) \to L \cdot 0 = 0$

(2) $\bar{x}$ è l'unico punto fisso:
Sia $\bar{y}$ un altro punto fisso:

$$d(\bar{x},\bar{y}) = d(T(\bar{x}),T(\bar{y})) \leq L\, d(\bar{x},\bar{y})$$

$L<1$ $\quad d(\bar{x},\bar{y}) = 0.$

$\square$

A noi servirà $X = C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$

Teorema $C^0([a,b],\mathbb{R}^n)$, $d = d_\infty$ = distanza uniforme.

è completo.

dim (1) mostriamo che se X è sp. metrico completo

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(A,X) = \{f : A \to X,\ f \text{ limitata}\}$$

con $d = d_\infty$ è completo

$$d_\infty(f,g) = \sup_{x\in A} d(f(x),g(x)) < +\infty \quad \left[\begin{array}{l} \text{su } \mathbb{R}: \\ |f(x)-g(x)| \end{array}\right]$$

perché f e g sono limitate

- mostriamo che $\mathcal{B}$ è completo.

Sia $f_k : A \to X$ una successione di Cauchy in $\mathcal{B}$

$$\forall \varepsilon>0\ \exists N:\ \forall k,j>N \quad \sup_{x\in A} d(f_k(x),f_j(x)) < \varepsilon.$$

$$\forall x: \quad d(f_k(x),f_j(x)) < \varepsilon$$

$\forall x$: $f_k(x)$ è di Cauchy in X.

quindi $f_k(x) \to f(x)$

Vogliamo mostrare che $f_k \to f$ in $\mathcal{B}$ $\left(f_k \overset{\text{unif.}}{\rightrightarrows} f\right)$

Basta mostrare che $\forall \varepsilon > 0$ $d_\infty(f_k, f) < \varepsilon$ def.

$$d\big(f_k(x), f(x)\big) \leq d\big(f_k(x), f_j(x)\big) + d\big(f_j(x), f(x)\big)$$

$\left[\; \forall x \text{ posso scegliere } j \text{ in modo che:} \right.$

$$d(f_j(x), f(x)) < \varepsilon \leftarrow f_j(x) \to f(x).$$

$$\text{e} \quad d_\infty(f_k, f_j) < \varepsilon \leftarrow \text{Cauchy} \quad \Big]$$

$$\leq 2\varepsilon \implies \sup_{x \in A} d\big(f_k(x), f(x)\big) \leq 2\varepsilon.$$

significa che $f_k \to f$ uniformemente.

- f è limitata perché f_k è limitata

$$\text{e } d_\infty(f, f_k) < +\infty.$$

(2) Se $f_k \in C^0([a,b], \mathbb{R}^n)$ è di Cauchy. $\quad$ f_k è limitata per Weierstraß

$f_k \in \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R}^n)$

$$f_k \xrightarrow{d_\infty} f \in \mathcal{B}([a,b], \mathbb{R}^n)$$

f è continua? Sì, già visto "C^0 è chiuso in $\mathcal{B}$"

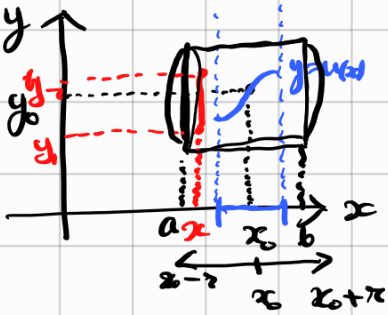
$\square$

PROBLEMA di CAUCHY: esistenza e unicità

<u>Teorema</u> (Cauchy-Lipschitz: esistenza e unicità locale)

Consideriamo il problema di Cauchy: $f: [a,b] \times \{|y-y_0| \le r\}$

$$(*) \quad \begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}$$



<u>Hyp</u> (1): f continua

(2) f è "localmente lipschitz rispetto a y uniformemente rispetto a x"

$\exists L : \forall x, y_1, y_2$, $x \in [a,b]$, $|y_1 - y_0| \le r$, $|y_2 - y_0| \le r$

$$\boxed{|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le L \cdot |y_1 - y_2|}$$

(Vedremo(?): se $f \in C^1(\Omega)$ cioè $\frac{\partial f}{\partial x} \in C^0$, $\frac{\partial f}{\partial y} \in C^0$

allora f soddisfa l'ipotesi)

<u>Th</u>: esiste $\delta > 0$ t.c. per ogni intervallo I

$$x_0 \in I \subseteq \underbrace{[x_0-\delta, x_0+\delta]}\cap [a,b]$$

esiste una unica $u: I \to \mathbb{R}$ tale che u risolve $(*)$ $\forall x \in I$.

Σ

dim

Passo 1 . (formulazione integrale)

⊙ $u \in C^1$ e risolve (*) $\boxed{\begin{cases} u'(x) = f(x, u(x)) \\ u(x_0) = y_0 \end{cases}}$

$\Updownarrow$

$u \in C^0$ e risolve: $\boxed{u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt}$

"$\Downarrow$" $u(x) - u(x_0) = \int_{x_0}^{x} u'(t)\, dt$

$$u(x) = \underset{y_0}{\underset{\parallel}{u(x_0)}} + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt \qquad \text{ok!}$$

$f(t, u(t)) \in C^0$

"$\Uparrow$"

se $u(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt$

per il T.F.C. u è derivabile: $u'(x) = f(x, u(x)) \in C^0$

$\Rightarrow u \in C^1$ $\qquad u(x_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x_0} \text{—} = y_0$

ok!

Passo 2 definiamo l'operatore $T : C^0 \to C^0$

$$\boxed{T(u)(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, u(t))\, dt}$$

u risolve il problema integrale $\Leftrightarrow$ $u = T(u)$

.... continua venerdì ...