ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 45 - 30.1.2023

Polinomio di Taylor di ordine n centrato in x_0

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x-x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)\cdot(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Formula di Taylor

$$f(x) = P(x) + o((x-x_0)^n)$$
per $x \to x_0$

$$f(x) - P(x) = o((x-x_0)^n)$$

$$\frac{f(x) - P(x)}{(x-x_0)^n} \to 0 \quad \text{per } x \to x_0$$

Esercizio Trovare il polinomio di Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ della funzione

$$f(x) = \sin(2 - 2\cos x)$$

Idea non voglio fare derivate! So:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3), \quad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad \text{per } x \to 0$$

$$\sin(\underbrace{2 - 2\cos x}_{y}) \stackrel{\epsilon}{=} y - \frac{y^3}{6} + o(y^3) = (*)$$

$$y = 2 - 2\cos x = \cancel{2} - 2\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) \stackrel{c}{=} x^2 + o(x^2)$$

$$(*) \overset{\subseteq}{=} \left(x^2+o(x^2)\right) - \frac{\left(x^2+o(x^2)\right)^3}{6} + o\left(\left(x^2+o(x^2)\right)^3\right)$$

$$\overset{\subseteq}{=} x^2+o(x^2) + x^6 + \cancel{o(x^6)} + o\left(x^6+\cancel{o(x^6)}\right) \quad ??$$

$$\overset{\subseteq}{=} x^2 + o(x^2) + o(\cancel{x^6})$$

x^2 è il Polinomio cercato.

$$o\left(x^6+o(x^6)\right) \overset{??}{\subseteq} o(x^6)$$

Verifica: Sia $f \in o\left(x^6+o(x^6)\right)$ $\qquad f \overset{?}{\in} o(x^6)$

$$\frac{f(x)}{x^6} = \frac{f(x)}{x^6+g(x)} \cdot \frac{x^6+g(x)}{x^6} \longrightarrow 0. \quad \square$$

$$\exists g \in o(x^6): \frac{f(x)}{x^6+g(x)} \to 0$$

$$\frac{x^6+g(x)}{x^6} = 1 + \frac{g(x)}{x^6} \to 1$$

Anzi: Se $f \sim g$ per $x \to x_0$

$$o(f) = o(g) \quad \text{per } x \to x_0.$$

$$x^6 \subseteq o(x^2)$$
$$o(x^6) \subseteq o(x^2)$$

$\frac{x^6}{x^2} \to 0$ per $x \to 0$

$f \in o(x^6)$: $\quad \frac{f(x)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^6} \cdot x^4 \to 0$

$$x^6 + o(x^6) \subseteq o(x^2) + o(x^2) = o(x^2)$$

Formalmente. Fissato x_0. Data $g : A \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$

$$\boxed{o(g) = \left\{ f : \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \right\}}$$ DEF.

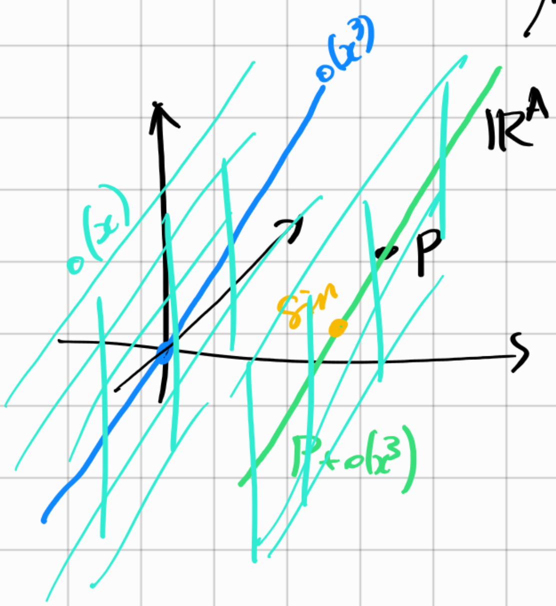
$o(g)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^A = \{f : A \to \mathbb{R}\}$

spazio vettoriale sul campo $\mathbb{R}$.

Quando scriviamo: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$

si intende $\sin \in P + o(x^3)$ NOTAZIONE

$P(x) = x - \frac{x^3}{6}$



NOTAZIONI:

$x + A = \{x + y : y \in A\}$

$A + B = \{x + y : x \in A, y \in B\}$

ABUSO DI NOTAZIONE

$$\sin x \overset{\in}{=} x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$\overset{\subseteq}{=} x + o(x)$$

come si è accorto Aristotele

Tramite queste definizioni si possono formalizzare le proprietà degli o-piccolo. Vedi appunti (operazioni con i simboli di Landau).

ES

$$\boxed{o(g) + o(g) = o(g)}$$

$$o(g) - o(g) = o(g)$$

$$o(f\cdot g) = f\cdot o(g) = f\cdot g\cdot \underline{o(1)}$$

$$o\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{o(f)}{g}$$

$$\left(o(f)\right)^n = o(f^n)$$

Cambio di variabile: (usato nell'esercizio precedente)

Se $f\in o(g)$ per $x\to x_0$
e $h(t)\to x_0$ per $t\to t_0$

Allora $\underbrace{f\circ h \in o(g\circ h)}$

in quanto $\dfrac{f(h(t))}{g(h(t))} \to 0$ per $t\to t_0$.

Errore tipico

per $x\to 0$

$$\sin(\cos t) \overset{\text{No!}}{=} \cos t + o(\cos t) \quad \text{per } t\to 0$$

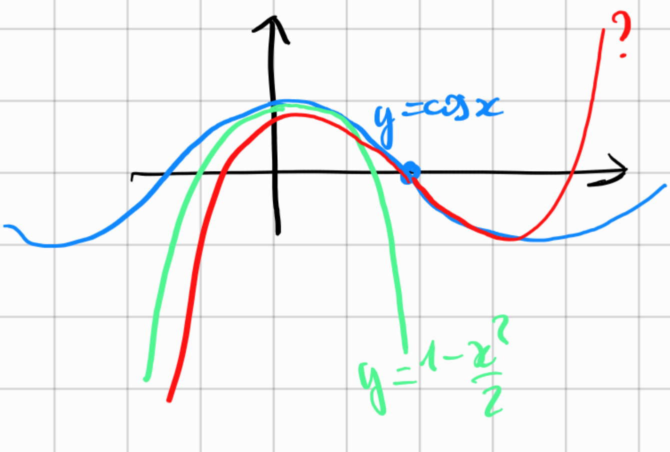
$\cos t \to 1 \neq 0$

$\underline{\sin x = x + o(x)}$ per $x\to 0$

E' vero che $\sin(\cos t) = \cos t + o(\cos t)$ $\quad t\to\frac{\pi}{2}$

Sì!!

Come si sviluppa $\cos t$ per $t\to\frac{\pi}{2}$?



- Uso le formule di addizione: $x = \underbrace{t-\frac{\pi}{2}}$

$$\cos t = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin x$$

$$= -\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)\right)$$

$$= \underbrace{-\left(t-\frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3}{6}} + o\left(\left(t-\frac{\pi}{2}\right)^3\right)$$

- Altro caso $\sin(\cos x) = ?$ per $x \to 0$

$t = \cos x$, $t \to 1$ per $x \to 0$ $\quad y = t-1 \to 0$

$$\sin(t) = \sin(\underbrace{1+y}) = \sin 1 \cdot \cos y + \cos 1 \cdot \sin y$$

$1+y = t$
$$= \sin 1 \cdot \left(1 - \frac{y^2}{2} + o(y^2)\right)$$

$y \to 0$
$$+ \cos 1 \left(y + o(y^2)\right)$$

$$= \underbrace{\sin 1 + (\cos 1)\cdot y - \frac{(\sin 1)}{2}\cdot y^2} + o(y^2)$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot (t-1) - \frac{\sin 1}{2}(t-1)^2 + o\left((t-1)^2\right)$$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot (\cos x - 1) - \cancel{\frac{\sin 1}{2}(\cos x - 1)^2} + \cancel{o\left((\cos x - 1)^2\right)}$$

per $x \to 0$

$$= \sin 1 + \cos 1 \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + o(x^2)\right) + o(x^2)$$

$$= \underbrace{\sin 1 - \frac{\cos 1}{2} x^2} + o(x^2)$$

↳ è il P. di T. di ordine 2 per $x \to 0$ per $f(x) = \sin(\cos x)$

Verifica: $P(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{1}{2} f''(0) x^2$

$$f(0) = \sin(\cos(0)) = \sin 1$$

$$f'(x) = -\cos(\cos x)\cdot \underbrace{\sin x}, \quad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = \sin(\cos x)\cdot(-\sin x)\cdot \sin x$$
$$- \cos(\cos x)\cdot \cos x$$

$$f''(0) = -\cos(1)$$

$$P(x) = \sin 1 - \frac{\cos 1}{2} x^2$$

Altra notazione O-grande

$$O(g) = \left\{ f : \limsup_{x \to x_0} \left| \frac{f}{g} \right| < +\infty \right\}$$

$$= \left\{ f : \exists U \text{ intorno di } x_0 \ \exists C > 0 \text{ t.c. } \left|\frac{f}{g}\right| \le C \text{ in } U \right\}$$

$$\supseteq \left\{ f : \lim_{x \to x_0} \frac{f}{g} \in \mathbb{R} \right\}$$

Es: $x \cdot \sin \frac{1}{x} \in O(x)$ per $x \to 0$.

infatti: $\dfrac{x \cdot \sin \frac{1}{x}}{x} = \sin \frac{1}{x}$ e $\left|\sin \frac{1}{x}\right| \le 1$.

Es: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + O(x^7)$

infatti: $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + o(x^7)$

$$\frac{x^7}{7!} = O(x^7) \qquad \frac{\frac{x^7}{7!}}{x^7} = \frac{1}{7!} \in \mathbb{R}.$$

$$\frac{x^7}{7!} + o(x^7) \subseteq O(x^7) + o(x^7) \subseteq O(x^7) + O(x^7) = O(x^7).$$

$$o(g) \subseteq O(g)$$

$\square$

[Vedetevi $f = \Omega(g)$ $\qquad$ $f = O(g)$ e $g = O(f)$]

Esercizio Determinare il carattere della serie

$$\sum_k \underbrace{\sqrt{k} \cdot \left(k \cdot tg \frac{1}{k} - \cos \frac{1}{k}\right)}_{k \to +\infty} = \sum f\left(\tfrac{1}{k}\right) \qquad \sum \frac{1}{k^\alpha} < +\infty \Uparrow \alpha < 1$$

$$x = \frac{1}{k} \to 0 \qquad x \to 0$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\underbrace{\frac{1}{x} \cdot tg\, x}_{} - \underbrace{\cos x}_{} \right) \qquad x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

$$g(x) = tg\, x = 0 + x + \cancel{0 \cdot \frac{x^2}{2}} + O(x^3) \qquad \text{per } x \to 0$$

$g'(x) = 1 + tg^2 x \qquad g'(0) = 1$

$g''(x) = 2 tg x (1 + tg^2 x) \qquad g''(0) = 0$

$g'''(x) = \ldots\ldots \qquad g'''(0) = ?$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{x}\left(x + O(x^3)\right) - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \left(\cancel{1} + O(x^2) - \cancel{1} + \frac{x^2}{2} + o(x^2)\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x}} O(x^2) = O(x^{3/2}) = O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)$$

per $x \to 0$ $\quad x = \frac{1}{k}$ $\quad$ per $k \to +\infty$

$3/2 > 1$

la serie converge $\square$