ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 31 - 5.12.2022

~~Mappa logistica:~~ Dinamica di una popolazione.

Crescita esponenziale.

$$\begin{cases} a_{n+1} = r \cdot a_n \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

$a_n = \#$ di individui al giorno n

$$a_n = r^n \cdot \alpha$$

$$a_{n+1} = r^{n+1}\alpha = r \cdot r^n \alpha = r \cdot a_n.$$

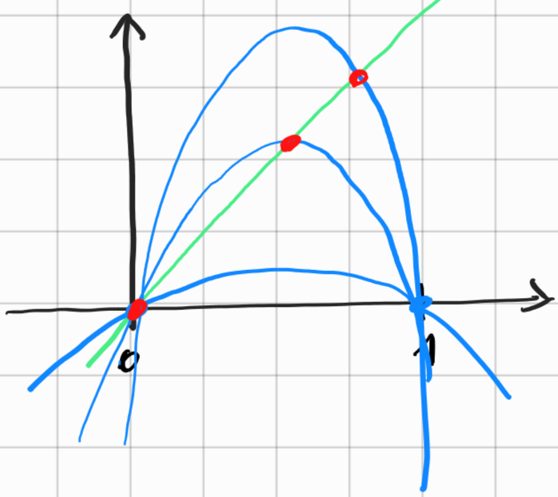
Mappa logistica

$$\begin{cases} a_{n+1} = r \cdot a_n \cdot (1 - a_n) \\ a_0 = \alpha \end{cases}$$

$a_n \in [0,1]$

r fissato

$a_{n+1} = f(a_n)$ $\qquad f(x) = r \cdot x \cdot (1-x)$



$f(x) = x$ (punti fissi)

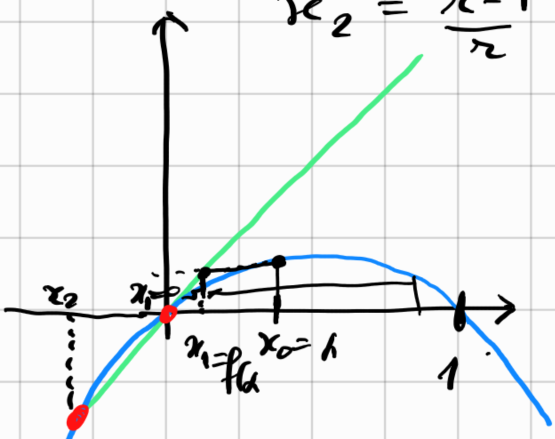
$x = r \cdot x \cdot (1-x)$

$x_1 = 0$ è sempre fisso

$1 = r(1-x) = r - rx$

$x_2 = \frac{r-1}{r}$ è il secondo punto fisso.

Caso $\boxed{0 < r \leq 1.}$



[💡 Se $\alpha \in [0,1]$ mi sembra che a_n sia ≥ 0 decrescente, $a_n \to 0$.]

① $I = [0,1]$ è invariante perché

$0 \leq x \leq 1$ $\quad f(x) \geq 0$ (sono tra le due radici)

$\forall x: f(x) \leq f(\frac{1}{2}) = r\frac{1}{2}(1-\frac{1}{2}) = \frac{r}{4} \leq \frac{1}{4}$ $\quad (r<1)$

$0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{r}{4} \leq \frac{1}{4} < 1$

Se $\alpha \in [0,1]$ allora $a_n \in [0,1]$ $\forall n$.

② Se $x \in [0,1]$ allora $\boxed{f(x) \leq x.}$

$r\,x(1-x) \leq x$

$-rx^2 + (r-1)x \leq 0$ $\qquad a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$

$x \leq x_2$ o $x \geq x_1 = 0$

Se $x \geq 0$ allora $f(x) \leq x$. $\qquad a_n$ è decrescente

<u>Conclusione</u>: $a_n \geq 0$, $a_{n+1} \leq a_n$ $\forall n$

$a_n \to \ell$, $\quad a_n \in [0,1]$ $\forall n$, $\Rightarrow \ell \in [0,1]$.

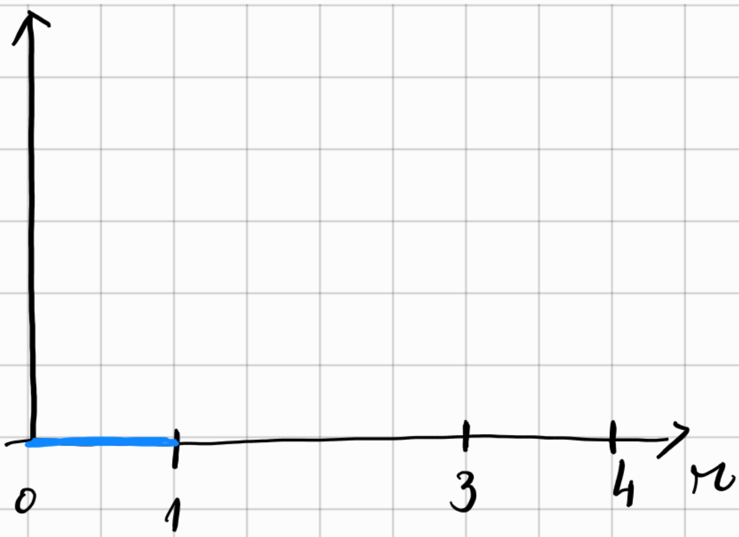
$$\begin{array}{ccc} a_{n+1} & = & f(a_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \ell & = & f(\ell) \end{array}$$

ℓ è un punto fisso

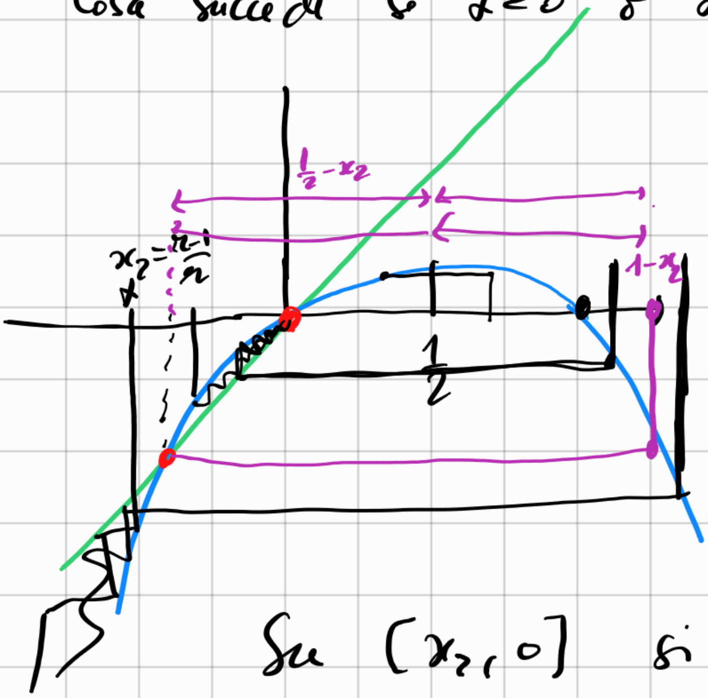
$\ell = 0$ / $x_2 \cancel{<0}$

$\underline{\ell = 0}$ $\qquad a_n \to 0$ $\qquad \square$

punti limite



Cosa succede se $\alpha<0$ o $\alpha>1$? $r\in[0,1]$.



(a) $\alpha\in[x_2,0]$

vertice

f è crescente su $(-\infty,\frac{1}{2}]$

$$x_2\leq x\leq 0 \Rightarrow \underset{x_2}{\underset{\parallel}{f(x_2)}}\leq f(x)\leq \underset{0}{\underset{\parallel}{f(0)}}$$

$[x_2,0]$ è invariante $\quad a_n\in[x_2,0]$ $\forall n$.

Su $[x_2,0]$ si ha $f(x)\geq x$.

$a_{n+1}\geq a_n \quad \forall n$.

a_n è crescente

$a_n\to \ell \qquad \ell\in[x_2,0]$. ℓ è un punto fisso

Se $\alpha=x_2 \quad a_n=\alpha=x_2 \ \forall n \quad a_n\to\alpha$.

Se $\alpha>x_2 \quad a_n\geq a_0=\alpha\Rightarrow \ell\geq\alpha>x_2$.

$\ell\neq x_2 \Rightarrow \ell=0. \qquad a_n\to 0$.

Se $\alpha<x_2$

l'intervallo $(-\infty,x_2]$ è invariante

f è crescente su questo intervallo

$$x\leq x_2 \Rightarrow f(x)\leq f(x_2)=x_2.$$

Su $(-\infty, x_2]$ $\quad f(x) \le x \Rightarrow a_n$ è decrescente

$a_{n+1} \le a_n.$

$a_n \to \ell.$

$$a_{n+1} = f(a_n) \longrightarrow \begin{cases} f(\ell) & \text{se } \ell \in \mathbb{R} \\ -\infty & \text{se } \ell = -\infty \end{cases}$$

$\downarrow \quad \overset{\shortparallel}{r \cdot a_n(1-a_n)}$

ℓ

(Moralmente $-\infty$ è un terzo punto fisso)

$\ell \le a_0 = \alpha < x_2$

ℓ non è un punto fisso

$\Rightarrow \ell = -\infty.$

$\alpha > 1$ $\quad$ devo discriminare $\quad f(x) = x_2 = \frac{r-1}{r}$

$x = 1 - x_2 = 1 - \frac{r-1}{r} = \frac{1}{r}$

se $\quad 1 < \alpha < \frac{1}{r}$

$a_0 = \alpha \quad a_1 = f(\alpha) \in (x_2, 0)$

ci riconduciamo al caso $\alpha \in (x_2, 0)$

$a_n \to 0.$

se $\quad \alpha = \frac{1}{r} \qquad a_0 = \alpha, \quad a_1 = x_2, \ \dots \ a_n = x_2 \quad \forall n.$

$a_n \to x_2.$

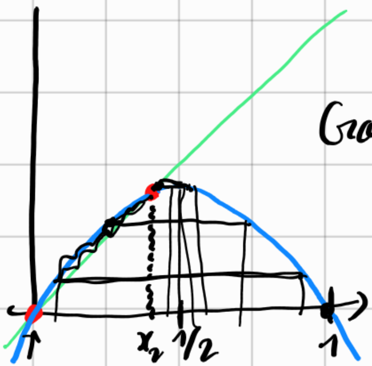
Se $\quad \alpha > \frac{1}{r} \qquad a_0 = \alpha, \quad a_1 < x_2$

mi riconduco al caso $\quad \alpha < x_2$

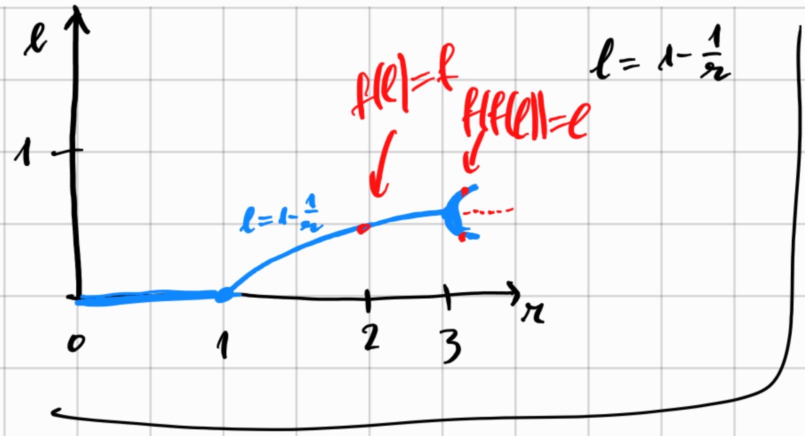
$a_n \to -\infty.$ $\qquad \square$

Caso $\quad 1 < r \le 2 \qquad x_2 = \frac{r-1}{r} = \underbrace{1 - \frac{1}{r}} \qquad 0 < x_2 < \frac{1}{2}$

$\alpha \in [0,1]$



Graficamente mi aspetto che se $\alpha \in (0,1)$ $\quad a_n \to x_2$



Se $\alpha \in [0, x_2]$ $\quad$ f è crescente su $[0, \frac{1}{2}]$ $\quad$ $x_2 < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ $\quad 0 \leq x \leq x_2 \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ 0}}{f(0)} \leq f(x) \leq \underset{\substack{\| \\ x_2}}{f(x_2)}$

$[0, x_2]$ è invariante.

$f(x) \geq x$ su $[0, x_2]$

$a_{n+1} \geq a_n$ $\quad$ a_n crescente, $a_n \to \ell$, $\ell \in [0, x_2]$

$\Downarrow$

$\ell = f(\ell)$.

Se $\alpha = 0$ $\quad a_n = 0 \quad \forall n \quad a_n \to 0$.

Se $\alpha \in (0, x_2]$ $\quad a_n \geq \alpha \quad \ell \geq \alpha > 0 \Rightarrow \ell = x_2$.

$a_n \to x_2 = 1 - \frac{1}{r}$.

$f(x) < x$ se $x > x_2$

Se $\alpha \in [x_2, \frac{1}{2}]$: $\quad f$ crescente

$x_2 \leq x \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ x_2}}{f(x_2)} \leq f(x) \leq f(\frac{1}{2}) < \frac{1}{2}$

$[x_2, \frac{1}{2}]$ è invariante $\quad a_n \in [x_2, \frac{1}{2}] \ \forall n$

$f(x) \leq x$ $\quad a_n$ è decrescente

$\ell \in [x_2, \frac{1}{2}] \Rightarrow \ell = x_2$.

$a_n \to x_2$ decrescendo.

Se $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ mi riconduco ad uno dei due casi precedenti $\quad a_0 = \alpha$, $a_1 = f(\alpha) \in [0, f(\frac{1}{2})]$

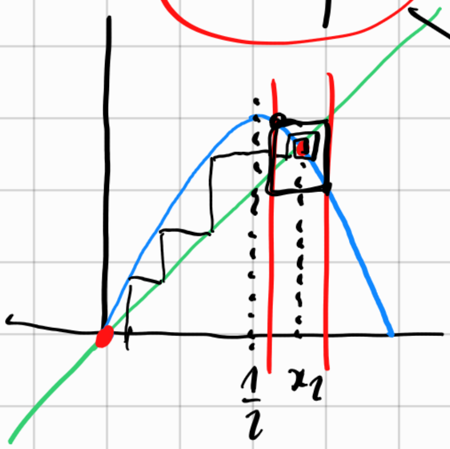
$\subseteq [0, \frac{1}{2}]$.

Se $\alpha \neq 1$ $\quad a_n \to x_2$, se $\alpha = 1$ $\quad a_{n+1} = 0 \to 0$. $\square$

Caso $2 < r \leq 3$

$x_2 = 1 - \frac{1}{r} > \frac{1}{2}$

punto fisso di $f \circ f$



a_{2n} e a_{2n+1} hanno limite

se $r \leq 3$ hanno lo stesso limite

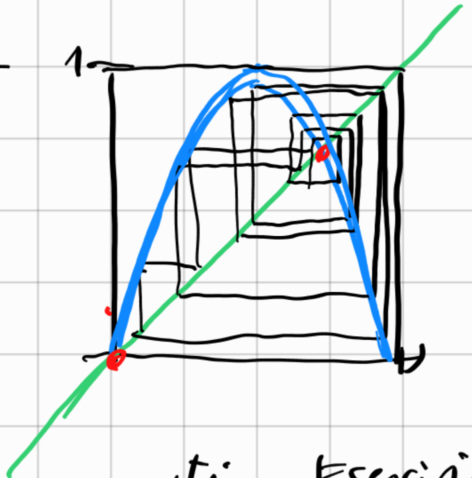
se $f(f(\ell_1)) = \ell_1$

$f(\ell_1) = \ell_2$

$f(\ell_2) = \ell_1$

$f(f(\ell_2)) = \ell_2$

Caso $r = 4$



Vedere gli appunti <u>Esercizio 7.13</u>

a_n non ha limite