Il compito ex.1

venerdì 17 giugno 2022 12:46

Studiare al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, e $x \in \mathbb{R}$ la convergenza semplice e assoluta della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x^n \Big[\underbrace{n \operatorname{tg}\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} - \frac{5}{6}\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}_{= a_n}\Big]^{\alpha}$$

Si ha

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^6)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$$

$$\ln(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$x = 1/n$.

$$\Rightarrow a_n = n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{2}{15n^5} + o\left(\frac{1}{n^6}\right)\right) +$$

$$-1 + \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{24n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

$$-\frac{5}{6}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{2n^4} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right) =$$

$$= \underbrace{(1-1)}_{0} + \frac{1}{n^2}\underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{5}{6}\right)}_{0} + \frac{1}{n^4}\underbrace{\left(\frac{2}{15} - \frac{1}{24} + \frac{5}{12}\right)}_{A} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) =$$

$$= A\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right) \qquad A > 0 \quad ; \Rightarrow a_n > 0 \quad \text{per } n \geq \bar{n}$$

Quindi

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|x^n|\, a_n^{\alpha}}{|x^n|\, n^{-4\alpha}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(A\frac{1}{n^4} + o\left(\frac{1}{n^4}\right)\right)^{\alpha}}{n^{-4\alpha}} = A^{\alpha} \begin{array}{l}\in \mathbb{R} \\ \neq 0\end{array}$$

$\Rightarrow$ la serie data converge assolutamente $\Leftrightarrow$ converge S_α:

$S_\alpha = \sum |x^n|\, n^{-4\alpha}$ criterio del rapporto

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x^{n+1}|(n+1)^{-4\alpha}}{|x^n|\, n^{-4\alpha}} = |x| \lim_{n} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-4\alpha} = |x|$$

Quindi per $|x|<1$ la serie data converge assolutamente

e non converge per $|x|>1$. ($|x|>1 \Rightarrow$ termine generale non infinitesimo)

Per $x=\pm 1$, $S_\alpha = \sum |x^n|\, n^{-4\alpha} = \sum \frac{1}{n^{4\alpha}}$ che converge $\Leftrightarrow \alpha > \frac{1}{4}$

; la serie data conv. ass. per $|x|=1$, $\alpha > \frac{1}{4}$

Studiamo ora la convergenza semplice:

per $|x|>1$ $x^n a_n^\alpha$, come già visto, non è infinitesimo,

la serie non converge; per $x=1$, come già visto

la serie converge $\Leftrightarrow$ $\alpha > \frac{1}{4}$

Sia ora $x=-1$; $\sum(-1)^n a_n^\alpha$; se $\alpha \le 0$ la serie

non converge ($a_n^\alpha \not\to 0$). Sia allora $\alpha > 0$

$$\varphi(x) = \frac{1}{x}\operatorname{tg} x - \cos x - \frac{5}{6}\log(1+x^2) = A x^4 + o(x^4), \quad A>0$$

Allora lo sviluppo di Taylor di $\varphi'(x)$ è

$$\varphi'(x) = 4Ax^3 + o(x^3) \;\Rightarrow\; \varphi'(x) > 0 \quad \text{per } 0<x<\rho$$

$\Rightarrow \varphi(x)$ crescente per $0<x<\rho$ $\Rightarrow$

$\varphi\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ decrescendo per $n\to+\infty$ $\Rightarrow$

per Leibniz la serie converge semplicemente per $x=-1$, $\forall \alpha>0$.

II compito ex.2

sabato 18 giugno 2022 12:29

Calcolare

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^x \sin\frac{1}{t}\,dt}{\int_{\frac{1}{x}}^1 \frac{1}{\sin t}\,dt} = \lim_{x\to\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

Sia $\varphi_1(x) = \int_1^x \sin\frac{1}{t}\,dt$

poiché $\frac{\sin\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}} \xrightarrow[t\to+\infty]{} 1 \Rightarrow \sin\frac{1}{t} \geq \frac{1}{2}\frac{1}{t} \quad t \geq \bar{t}$

$$\int_1^x \frac{1}{t}\,dt \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty \Longrightarrow \int_1^x \sin\frac{1}{t}\,dt \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$$

Inoltre

$0 < \sin t < t \quad$ per $0 < t \leq 1$

$$\int_\delta^1 \frac{1}{\sin t}\,dt \geq \int_\delta^1 \frac{1}{t}\,dt \Rightarrow \int_\delta^1 \frac{1}{\sin t} \xrightarrow[\delta\to 0]{} +\infty$$

$\Rightarrow \varphi_1(x) \to +\infty, \quad \varphi_2(x) \to +\infty \quad$ per $x \to +\infty$

φ_1 e $\varphi_2 \in C^1$: calcoliamo $\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)} = $ (se $\exists$) de L'Hôpital

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi_1'(x)}{\varphi_2'(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{d}{dx}\int_1^x \sin\frac{1}{t}\,dt}{\quad} =$$

$$x \to +\infty \qquad \varphi_1'(x) \qquad x \to +\infty \qquad \frac{\quad}{\frac{d}{dx}\int_{1/x}^{1} \frac{1}{\sin t}\,dt} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sin \frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin \frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(\sin \frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\right)^2 \underset{x = \frac{1}{t}}{=} \lim_{t \to 0} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 = 1$$

Il compito ex. 3-I

venerdì 17 giugno 2022 14:38

Sia dato il pb. di Cauchy, con a fissato, $a \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u'(x) = 2|u(x)| + 3x^2 \\ u(a) = 0 \end{cases}$$

1) Trovare la soluzione, indicando l'intervallo massimale di esistenza

2) Dire per quali valori di a la soluzione $\in C^2(\mathbb{R})$

3) Dire se $\exists$ soluzioni definite su tutto $\mathbb{R}$, sempre ≥ 0.

1) Sia $x < a$; $u' > 0$ $\forall x \Rightarrow u$ crescente $\Rightarrow$

se $x < a \Rightarrow u(x) < 0$; $x > a \Rightarrow u(x) > 0$

sia $x < a$ $\quad u' = -2u + 3x^2$

omogenea $\quad u' = -2u$: sol $u(x) = Ce^{-2x}$

una sol della non omogenea: per "somiglianza"

$\bar{u}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ $\quad : \bar{u}' = 2\alpha x + \beta$ $\quad \bar{u}' = -2\bar{u} + 3x^2$

$\Rightarrow$ $2\alpha x + \beta = -2\alpha x^2 - 2\beta x - 2\gamma + 3x^2$

$\Rightarrow 2\alpha = 3$; $\alpha = \frac{3}{2}$ $\quad$; $2\alpha = -2\beta \Rightarrow \beta = -\frac{3}{2}$: $\gamma = -\frac{\beta}{2} = \frac{3}{4}$

Quindi la sol della non omogenea (sempre per $x < a$)

$u(x) = Ce^{-2x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ $\quad , C \in \mathbb{R}$

imponiamo $u(a) = 0$: $Ce^{-2a} + \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{3}{4} = 0$

$C = \left(-\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}\right)e^{2a}$

$\Rightarrow u_1(x) = \left(-\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}\right)e^{2a-2x} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ $\qquad x < a$

Oppure, equivalentemente, si cerca una soluzione

ancora per $x<a$, stante da $\bar{u}(x) = C(x)e^{-2x}$

metodo della variazione della costante

$u' = -2u + 3x^2 \qquad C' e^{-2x} - 2Ce^{-2x} = -2C(x)e^{-2x} + 3x^2$

$\Rightarrow C' = 3x^2 e^{2x} \quad \Rightarrow C(x) = 3\int e^{2x} x^2 \, dx =$

$3\left(\frac{e^{2x}}{2} x^2 - \int \frac{e^{2x}}{2} 2x\right) = 3\left[\frac{e^{2x}}{2} x^2 - \frac{e^{2x}}{2} x + \int \frac{e^{2x}}{2}\right] =$

$= \frac{3}{2} e^{2x}\left(x^2 - x + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$ si trovano le stesse soluzioni

II compito ex.3-II

venerdì 17 giugno 2022 15:35

Sia ora $x > a \Rightarrow u(x) > 0 \Rightarrow u' = 2u + 3x^2$

sol. omogenea $u(x) = c\, e^{2x}$

una sol della non omogenea, per "somiglianza"

$\bar{u}(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma \qquad \bar{u}' = 2\alpha x + \beta$

ma $\bar{u}' = 2\bar{u} + 3x^2 \Rightarrow$

$$2\alpha x + \beta = 2\alpha x^2 + 2\beta x + 2\gamma + 3x^2$$

$\Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2} \quad \beta = \alpha = -\frac{3}{2} \quad ; \gamma = \frac{\beta}{2} = -\frac{3}{4}$

$\Rightarrow \bar{u} = c\, e^{2x} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \quad , c \in \mathbb{R} \quad (x > a)$

imponiamo $\bar{u}(a) = 0$

$$c\, e^{2a} - \frac{3}{2}a^2 - \frac{3}{2}a - \frac{3}{4} = 0$$

$$c = \left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}\right) e^{-2a}$$

$$u_2(x) = \left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}\right) e^{-2a+2x} - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4} \qquad x > a$$

Naturalmente lo stesso risultato si può trovare con il metodo della variazione (come fatto per $x < a$)

allora sia $\bar{u}(x) = \begin{cases} u_1 & x < a \\ 0 & x = a \\ u_2 & x > a \end{cases}$

$\bar{u}$ è sol ...

$u_2 \quad x > a$

$\tilde{u}$ è sol. di un pb. di Cauchy con $\tilde{u}' = f(x, \tilde{u})$

f lip $\Rightarrow \tilde{u} \in C^1(\mathbb{R})$; inoltre $\tilde{u}$ è chiaramente C^∞ in $(-\infty, a] \cup (a, +\infty)$

Ci domandiamo se $\tilde{u} \in C^2(\mathbb{R})$

Si ha

$$\begin{cases} u_1' = 3x - \frac{3}{2} - 2\left(-\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}\right)e^{2a-2x} \\ u_2' = -3x - \frac{3}{2} + 2\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}\right)e^{-2a+2x} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_1'' = 3 + 4\left(-\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}\right)e^{2a-2x} \\ u_2'' = -3 + 4\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}\right)e^{-2a+2x} \end{cases}$$

$$\lim_{x \to a^-} u''(x) = 3 + 4\left(-\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a - \frac{3}{4}\right) \qquad \mathrm{I}$$

$$\lim_{x \to a^+} u''(x) = -3 + 4\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}a + \frac{3}{4}\right) \qquad \mathrm{II}$$

$\mathrm{I} = \mathrm{II} \iff 3 - 6a^2 + 6a - 3 = -3 + 6a^2 + 6a + 3$

$\iff -6a^2 = 6a^2 \iff a = 0$

$f \in C^2(\mathbb{R} - \{a\})$ e $f \in C^1(\mathbb{R})$
$\lim_{x \to a^+} f''(x) = \lim_{x \to a^-} f''(x) = l \in \mathbb{R}$
$\Rightarrow f \in C^2(\mathbb{R})$ e $f''(a) = l$

Problema: $\exists$ soluzioni dell'eq. def. su tutto $\mathbb{R}$ e sempre ≥ 0?

Ma una tale soluzione v soddisfa

$v' = 2v + 3x^2 \geq 0$ (per essere precisi $v'(x) \geq 0 \ \forall x$

$v' = 2v + 3x^2 \geq 0$ (per essere precisi $v'(x) \geq 0 \ \forall x$ e $v'(x) > 0 \ \forall x \neq 0$) $\Rightarrow v$ strettamente crescente.

$\Rightarrow \exists \lim_{x \to -\infty} v(x) \geq 0$

ma $\lim_{x \to -\infty} v'(x) \geq \lim_{x \to -\infty} 3x^2 = +\infty$, assurdo