ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 27 - 22.11.2021

Criterio di condensazione di Cauchy

Sia $a_k \geq 0$, a_k decrescenti allora

$$\sum a_k \text{ ha lo stesso carattere di } \sum 2^k a_{2^k}$$

dim

$$\begin{aligned}
&(a_1)\\
&a_2 + a_3\\
&a_4 + a_5 + a_6 + a_7\\
&a_8 + a_9 + a_{10} + a_{11} + \dots + a_{15}\\
&a_{16} + \dots + a_{31}\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$a_k \geq 0$

$\Downarrow$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad S_n \text{ è crescente}$$

$$\lim_{k \to +\infty} S_k = \lim_{N \to +\infty} S_{2^N - 1}$$

$$S_{2^0 - 1} = 0$$

$$S_{2^1 - 1} = a_1$$

$$S_{2^2 - 1} = a_1 + a_2 + a_3$$

$\vdots$

$$S_{2^N - 1} = (((a_1) + a_2) + a_3 + a_4) + a_5 + \dots + a_8 + \dots + a_{2^N - 1}$$

$$\boxed{S_{2^N-1} = \sum_{k=1}^{2^N-1} a_k = \sum_{n=0}^{N-1} \cdot \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1} a_k}$$

$$S_{2^N-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \dots + a_7) + \dots + (a_{2^{N-1}} + \dots + a_{2^N-1})$$

$n=0$ $\quad n=1$ $\quad n=2$ $\quad n=N-1$

$$\Big(\overbrace{a_{2^n} + a_{2^n+1} + \dots + a_{2^{n+1}-1}}^{2^n}\Big) + a_{2^{n+1}}$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} 2^n \cdot a_{2^{n+1}} \le \sum_{n=0}^{N-1} \cdot \sum_{k=2^n}^{2^{N+1}-1} a_k \le \sum_{n=0}^{N-1} 2^n \cdot a_{2^n}$$

Se $\sum a_k$ è convergente

$\Downarrow$

$\sum 2^k a_{2^{k+1}}$ è convergente

$\Updownarrow$

$\sum 2^{k-1} a_{2^k}$ è convergente

$\Updownarrow$

$\sum 2^k a_{2^k}$ è convergente $\square$

Se $\sum 2^k a_{2^k}$ è convergente

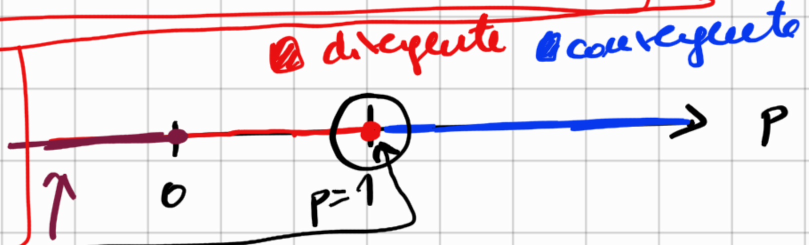
$\Downarrow$

$\sum a_k$ è convergente

Esempio

$$\boxed{\sum_k \frac{1}{k^p} \text{ è convergente} \iff p>1.}$$

$$\boxed{\sum \frac{1}{k} \text{ è divergente}}$$



a_k non è infinitesimo

Esempio $\quad k \ll \underbrace{k\ln k} \ll k^{1+\varepsilon}$

$\to \sum \frac{1}{k\ln k}$ converge? NO

$$\sum \frac{1}{k\cdot \ln^p k} \text{ converge} \qquad \left[\ln^p k = (\ln k)^p\right]$$

Criterio di condensazione $\Updownarrow$

$$\sum \cancel{2^k}\cdot \frac{1}{\cancel{2^k}\cdot \ln^p(2^k)}$$

$$\parallel$$

$$\sum \frac{1}{(k\ln 2)^p} = \frac{1}{\ln^p 2}\sum \frac{1}{k^p}$$

converge $\Updownarrow$ $p>1.$

$$\frac{1}{k(\ln k)^{1+\varepsilon}} \ll \underbrace{\frac{1}{k\ln k(\ln\ln k)}}_{?} \ll \frac{1}{k\ln k}$$

$$\sum \frac{1}{k\cdot\ln k\cdot \ln\ln k} \text{ converge?}$$

Criterio del rapporto

$a_k > 0$

$a_k \to 0$

$\Uparrow$ (*) già fatto

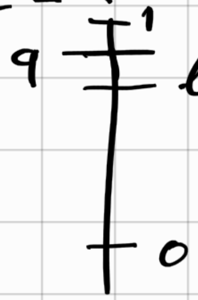
$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \ell$$

Se $\ell < 1$ allora ? (*) $\sum a_k$ è convergente

già fatto

Se $\ell > 1$ allora $a_k \to +\infty$

$\Rightarrow \sum a_k = +\infty$.



dim (*)

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} \to \ell < 1$$

Prendo q : $\ell < q < 1$.

$\frac{a_{k+1}}{a_k} \le q$ definitivamente

$\exists N : k \ge N : \quad a_{k+1} \le q \cdot a_k$

$$a_{N+1} \le q \cdot a_N$$

$$a_{N+2} \le q \cdot a_{N+1} \le q^2 \cdot a_N$$

$$\vdots$$

$$a_{N+k} \le q^k \cdot a_N$$

$\underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_{N+k} \text{ è convergente}}_{\text{con}}$ perché si stima a

$\sum q^k \cdot a_N$

$= a_N \sum q^k < +\infty$

$\uparrow$

$q < 1$.

$$\sum_{k=N}^{+\infty} a_k$$

$\square$

Criterio della radice $\qquad a_k \geq 0$

$$\boxed{\sqrt[k]{a_k} \longrightarrow \ell}$$

(*) se $\ell < 1$ la serie $\sum a_k$ converge

se $\ell > 1$ la serie $\sum a_k$ diverge.

conseguenza di $a_k \to +\infty$

dim (*) Scelgo q: $\qquad \ell < q < 1$

definitivamente $\qquad \sqrt[k]{a_k} \leq q$

ovvero: $\qquad a_k \leq q^k$

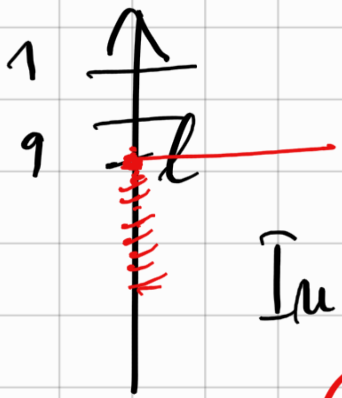
$\sum a_k$ converge in quanto $\sum q^k$ converge essendo $q < 1$. $\square$

Oss

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \longrightarrow \ell \quad \overset{\text{Criterio rapporto/radice}}{\Longrightarrow} \quad \sqrt[n]{a_n} \longrightarrow \ell$$

$$\Downarrow$$

$a_n > 0$ $\qquad \sum a_n$ converge



$$\lim_{k \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell$$

In realtà basta che

$$\boxed{\limsup_{n \to +\infty} \sqrt[k]{a_k} = \ell < 1}$$

Se $q > \ell$.

$a_k \leq q$ definitivamente

$\ell \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = \ell \iff \forall \varepsilon>0:$ definitivamente $\ell-\varepsilon < a_k < \ell+\varepsilon$

$\limsup\limits_{k\to+\infty} a_k = \ell \iff \forall \varepsilon>0:$ def. $a_k < \ell+\varepsilon$
freq. $\ell-\varepsilon < a_k$

$\liminf\limits_{k\to+\infty} a_k = \ell \iff \forall \varepsilon>0:$ freq. $a_k < \ell+\varepsilon$
def. $\ell-\varepsilon < a_k$

$\forall \varepsilon > 0$
Ogni a_k: definitivamente

$$\left(\liminf a_k\right) - \varepsilon \le a_k \le \limsup a_k + \varepsilon$$

$n! << n^n$

Esempi $\quad \sum \frac{n!}{n^n} \qquad a_n = \frac{n!}{n^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{(n+1)!}}{\cancel{n!}} \frac{n^n}{(n+1)^{n\cancel{+1}}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1.$$

la serie converge

$\frac{n!}{n^n} \to 0$ non basta

In alternativa $\qquad \frac{n!}{n^n} \overset{?}{<<} \frac{1}{n^2} \qquad \sum \frac{1}{n^2} < +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n}\cdot n^2 = 0$$

$p=2$

$1+4+9+16$

$4+9+16$

Osservazione $\quad a_k = k^p$

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{(k+1)^p}{k^p} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^p = \left(1+\frac{1}{k}\right)^p \to 1.$$

$$\sum k^p = \sum \frac{1}{k^{-p}}$$

converge $\Leftrightarrow$ $p<-1$.

Esercizio $\quad \boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x^k}{k^2}} \quad x>0.$

Per quali x la serie converge?

Se $x>0$ $\quad \frac{x^k}{k^2}>0$ posso applicare il criterio del rapporto:

$$a_k = \frac{x^k}{k^2} \qquad \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2}\cdot\frac{k^2}{x^k}$$

$$= \frac{x}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^2} \longrightarrow \frac{x}{1} = x$$

Se $x<1$ $(e\ x>0)$ la serie converge

Se $x>1$ la serie diverge

Se $x=1$ $\qquad a_k = \frac{1}{k^2}$

$p=2$

la serie converge.

$\sum \frac{1}{k^p}$ converge $\iff p>1$.

Criterio della radice:

$\sqrt[k]{k} \to 1$ per $k \to +\infty$

$x \geq 0$:

$$\sqrt[k]{\frac{x^k}{k^2}} = \frac{x}{\sqrt[k]{k^2}} = \frac{x}{\left(\sqrt[k]{k}\right)^2} \longrightarrow \frac{x}{1} = x.$$

SERIE A SEGNO VARIABILE

Teorema (convergenza assoluta)

Se $\sum |a_k|$ è convergente allora $\sum a_k$ è convergente.

def Diciamo che la serie $\sum a_k$ converge assolutamente se $\sum |a_k|$ converge.

$$\text{convergenza assoluta} \overset{\text{Teo}}{\Longrightarrow} \text{convergenza (semplice)} \overset{\text{condizione necessaria}}{\Longrightarrow} a_k \to 0$$

Es

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} = -1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

$\to 1 + 0 + 1/9 + 0 + \dots$

$\to 0 + \frac{1}{4} - 0 + \frac{1}{16} + 0 + \dots$

a_k

a_k^+

$$\left|\frac{(-1)^k}{k^2}\right| = \frac{1}{k^2} \qquad \sum \frac{1}{k^2} \text{ converge}$$

$$\Rightarrow \sum \frac{(-1)^k}{k^2} \text{ converge.}$$

dim $\quad a_k \qquad a_k^+ = \begin{cases} a_k & \text{se } a_k \geq 0 \\ 0 & \text{se } a_k < 0 \end{cases}$

$$a_k^- = \begin{cases} -a_k = |a_k| & \text{se } a_k \leq 0 \\ 0 & \text{se } a_k > 0 \end{cases}$$

$$a_k = a_k^+ - a_k^-$$

$$0 \leq a_k^+ \leq |a_k|$$

$$0 \leq a_k^- \leq |a_k|$$

Hyp. $\sum |a_k|$ converge

$\sum a_k^+$ converge $\qquad \sum a_k^-$ converge

$$\sum a_k = \sum (a_k^+ - a_k^-) = \sum a_k^+ - \sum a_k^-$$

$\uparrow$ è convergente

$\square$