ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 17 – 27.10.2021

$f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua se

f è continua in ogni $x_0 \in A$

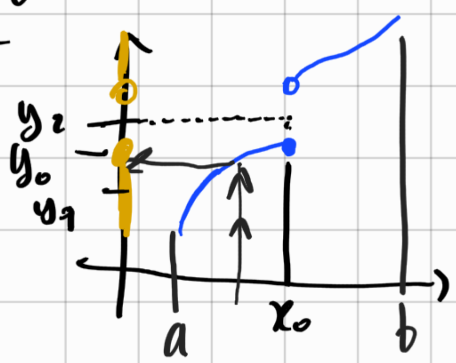
f è continua in $x_0 \in A$ se

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x \in A : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

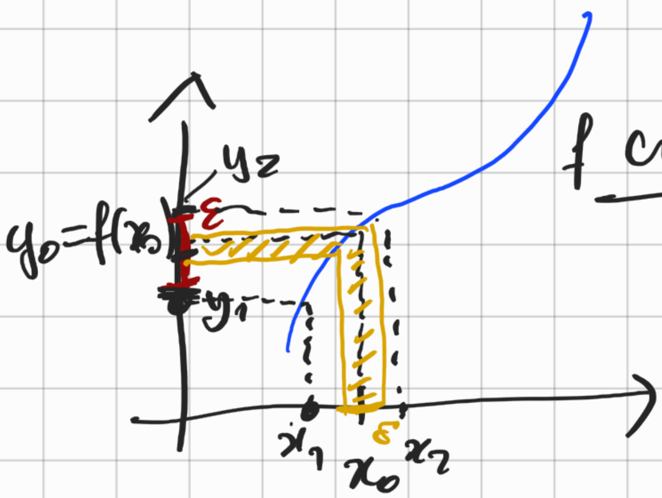
Teo Sia $f : I \to \mathbb{R}$, I intervallo. f monotona.

f è continua $\Leftrightarrow$ $f(I)$ è un intervallo.

Esempio



dim "$\Leftarrow$"



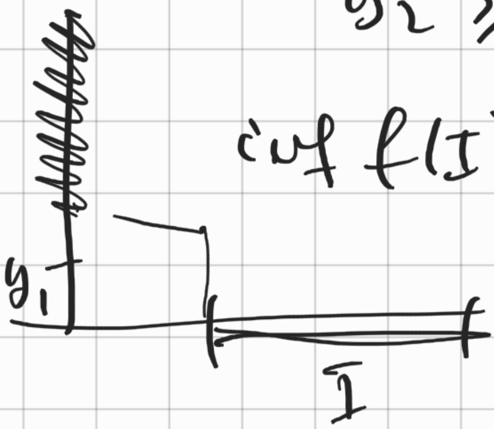
f crescente

Fissiamo $x_0 \in I$, $y_0 = f(x_0)$

Dato $\varepsilon > 0$, $y_1 = y_0 - \frac{\varepsilon}{2}$, $y_2 = y_0 + \frac{\varepsilon}{2}$

Se $y_1 \le \inf f(I) \Rightarrow f(x) \ge y_1 \quad \forall x$

$y_2 \ge \sup f(I) \Rightarrow f(x) \le y_2 \quad \forall x$



$\inf f(I) < y_1 < y_0 = f(x_0) \in f(I)$

BENE!

$$\Downarrow$$

$y_1 \in f(I)$

$\exists x_1 : f(x_1) = y_1$.

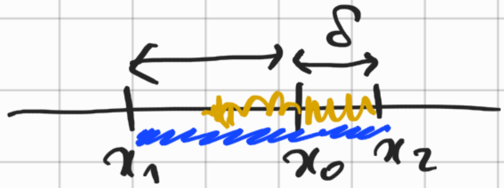
$\boxed{? \to \exists}$ $\quad x_1, x_2 \in I \quad$ t.c. $\quad f(x_1) = y_1$

$f(x_2) \le y_2$

f crescente $\Rightarrow \underbrace{x_1 < x_0 < x_2}$

$$\begin{array}{ccccc} f(x_1) & < & f(x_0) & < & f(x_2) \\ \parallel & & \parallel & & \parallel \\ y_1 & & y_0 & & y_2 \end{array}$$

$\delta = \min\{x_2 - x_0, x_0 - x_1\}$



Se $|x - x_0| < \delta \Rightarrow x_1 < x < x_2$

$y_0 - \frac{\varepsilon}{2} = y_1 = f(x_1) \le f(x) \le f(x_2) = y_2 = y_0 + \frac{\varepsilon}{2}$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \le \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

$\square$

"$\Rightarrow$" la rimandiamo

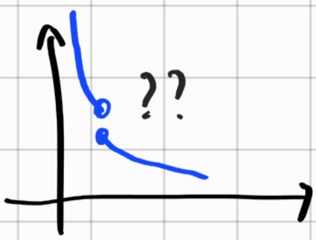
[Vedremo **Teorema** $f: I \to \mathbb{R}$ continua
I intervallo $\Rightarrow f(I)$ è un intervallo]

ES $f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad f: \underset{I}{(0,+\infty)} \to \mathbb{R}$

f è decrescente $\quad x_1 < x_2 \quad \frac{1}{x_1} \overset{?}{>} \frac{1}{x_2}$

$1 \overset{?}{>} \frac{x_1}{x_2}$

$f(I) = (0,+\infty)$

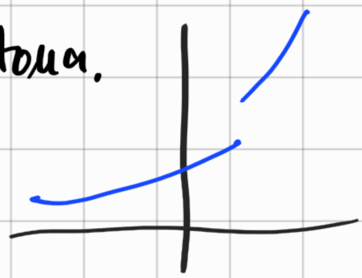


Dato $y > 0$
$\exists\, x > 0$ t.c. $\frac{1}{x} = y$
$x = \frac{1}{y}$.

($x^{\sqrt{2}}$ è continua)

$\underline{a^x}$, $\underline{\log_a x}$, x^α sono tutte continue.

a^x monotona.

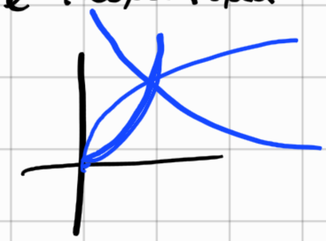


$f(x) = a^x$
$f: \mathbb{R} \to (0,+\infty)$
se $a \neq 1$ è bigettiva
$f(\mathbb{R}) = (0,+\infty)$
$\Rightarrow f$ è continua.
($a = 1$ $\quad f(\mathbb{R}) = \{1\}$)

$\log_a : (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ è surgettiva
monotona
$\mathbb{R}$ è un intervallo
$\Rightarrow \log_a$ è continua.

$f(x)=x^\alpha$ $\qquad f:[(0,+\infty)\to[(0,+\infty)$ (se $\alpha<0$)

è monotona



f è invertibile! $\Rightarrow$ biiettiva

$$\left(x^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = x^{\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}} = x$$

f è continua.

<u>Teorema</u> Se f, g sono continue allora:

$$f\circ g,\ f+g,\ f-g,\ f\cdot g,\ \frac{f}{g}$$

sono continue.

Esempio $\qquad f(x)=\dfrac{2^{\sqrt{x+\frac{x^2}{2}}}}{\sqrt[4]{x-3^x}}$ è continua.

$f(x)=x$ è continua.

$f(x)=c$ è continua

$f(x)=-x$ è continua

Banalità

<u>dim</u> f, g sono continue $\overset{?}{\Rightarrow}$ $x\mapsto f(g(x))$

$$\forall\varepsilon>0 : \exists\gamma>0 : \quad |y-y_0|<\gamma \Rightarrow |f(y)-f(y_0)|<\varepsilon$$

$$\forall\gamma>0 : \exists\delta>0 : \quad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\gamma$$

<u>$y_0=g(x_0)$</u> $\qquad |x-x_0|<\delta \Rightarrow |g(x)-g(x_0)|<\gamma$

$$\Rightarrow |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon.$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \; |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon$$

$f + g$ è continua?

f cont. $\to \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_1 > 0 : \; |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

g cont $\to \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta_2 > 0 : \; |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon$

$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ $\qquad \underbrace{\delta_1 > 0 \quad \delta_2 > 0}_{\delta > 0}$

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta : \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ |g(x) - g(x_0)| < \varepsilon \end{cases}$$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| = |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)|$$

$$= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \leq \underbrace{|f(x) - f(x_0)|}_{\wedge\, \varepsilon} + \underbrace{|g(x) - g(x_0)|}_{\wedge\, \varepsilon}$$

$[\; |a+b| \leq |a| + |b| \;]$

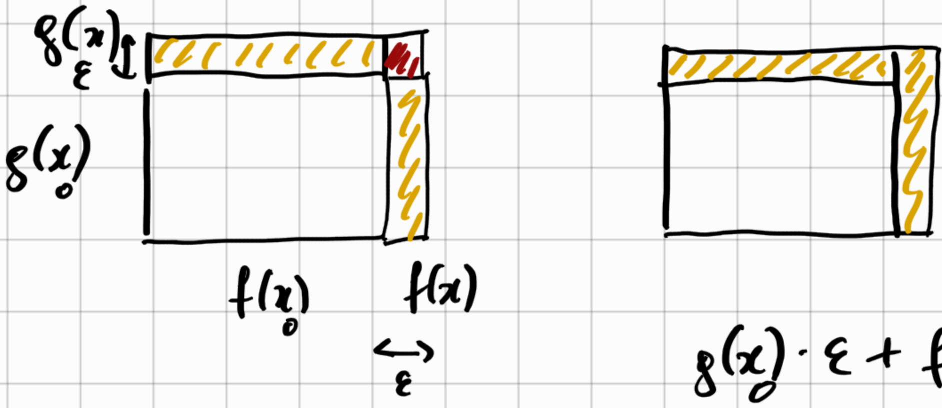
$|x - x_0| < \delta$ $\qquad \leq 2\varepsilon$

ok

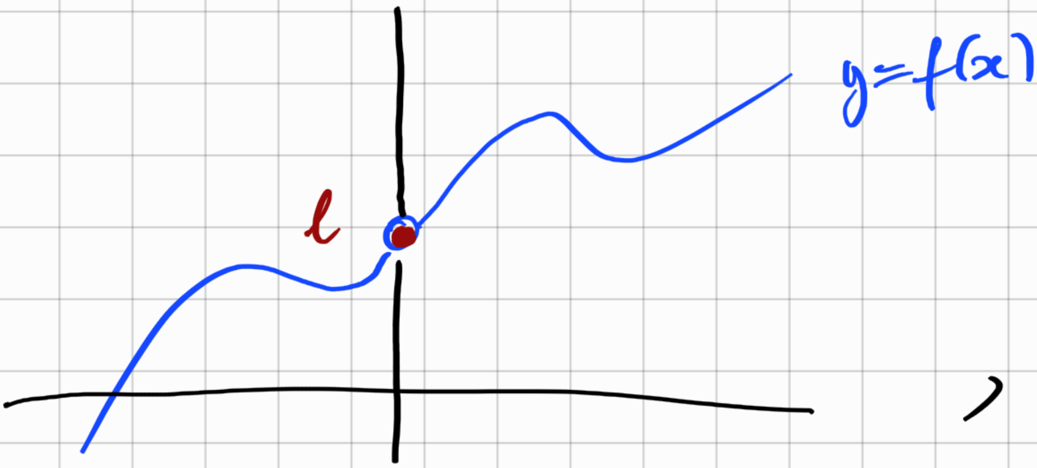
$$f-g = f+(-g) = f + h\circ g$$

$$h(y) = -y$$

$$f\cdot g = 2^{\log_2 f\cdot g} = 2^{\log_2 f + \log_2 g}$$ è continua.



$$g(x_0)\cdot\varepsilon + f(x_0)\cdot\varepsilon + \varepsilon^2$$



$f:\mathbb{R}\setminus\{0\}\to\mathbb{R}$

Scriviamo $\boxed{f(x)\to\ell \quad \text{per} \quad x\to x_0}$

se la funzione $\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x\neq x_0 \\ \ell & \text{se } x=x_0 \end{cases}$

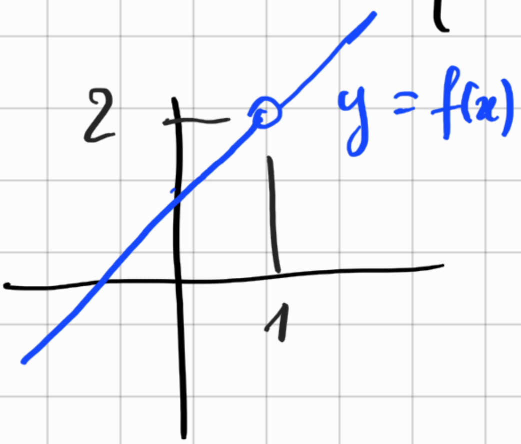
è continua.

Esempio $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ definita per $x \neq 1$.

$$= \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = x+1$$

$$\tilde f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2 & \text{se } x = 1 \end{cases} = \underline{x+1}$$

$\uparrow$ è continua



$$\frac{x^2-1}{x-1} \to 2 \quad \text{per } x \to 1$$

$$f : A \to \mathbb{R}$$

Definizione equivalente

$f(x) \to$ per $x \to x_0$

$$\tilde f(x) = \begin{cases} f(x) & \text{per } x \neq x_0 \\ \ell & \text{per } x = x_0 \end{cases}$$

è continua.

$$\tilde f : A \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}$$

$\Updownarrow$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \cup \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\tilde f(x) - \tilde f(x_0)| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$ se $x = x_0$ è sempre ok

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A \setminus \{x_0\} : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\tilde f(x) - \ell| < \varepsilon$$

$\Updownarrow$

$$\boxed{\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : \forall x \in A : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon}$$