Analisi Matematica
Prova scritta n. 3

Corso di laurea in Fisica, 2020-2021

13 luglio 2021

1. Si consideri, al variare di $\alpha > 0$ la serie
$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{1}{n}} - \sin\frac{1}{n} - \cos\frac{1}{n} + 2\ln\left(\cos\frac{1}{n}\right)\right)^{\alpha}.$$
Dimostrare che, per n_0 sufficientemente grande, la serie è ben definita. Studiarne poi la convergenza assoluta e la convergenza semplice.

2. Calcolare, se esiste
$$\lim_{x\to+\infty} \int_x^{x+\frac{1}{x}} \operatorname{arctg} t \cdot \ln\left(1+\frac{1}{t}\right) \cdot e^t \, dt.$$

3. Risolvere, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il problema di Cauchy
$$\begin{cases} u' + 3x^2u^4 = 0 \\ u(1) = \alpha. \end{cases}$$
Per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ l'intervallo massimale di esistenza è tutto $\mathbb{R}$?