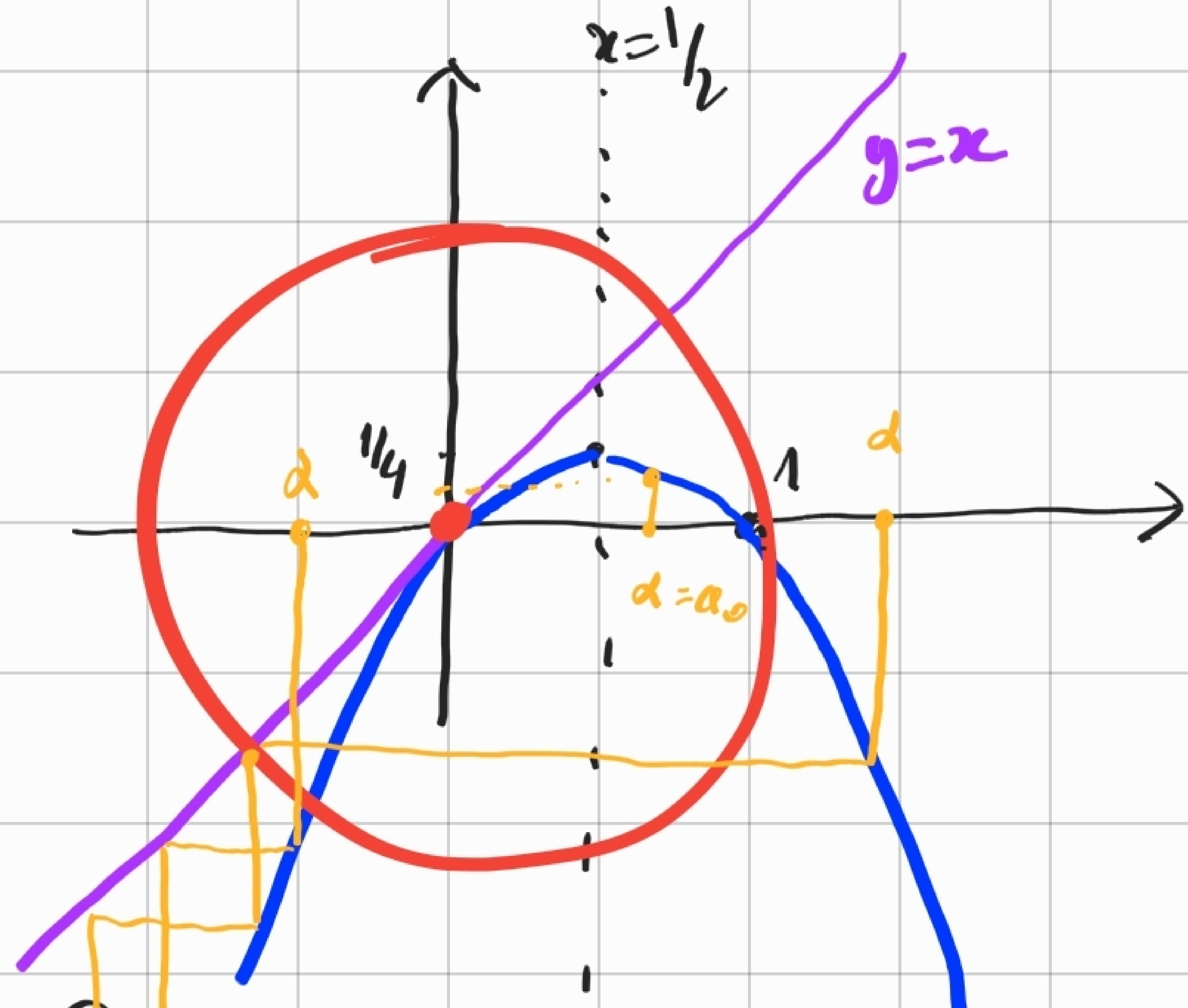
# ANALISI MATEMATICA B
# LEZIONE 31 - 4.12.2020

Esercizio

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = a_n - a_n^2 \end{cases} \qquad \alpha \in \mathbb{R} \qquad \begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = f(a_n) \end{cases}$$

$$f(x) = x - x^2 = x(1-x)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$




Punti fissi

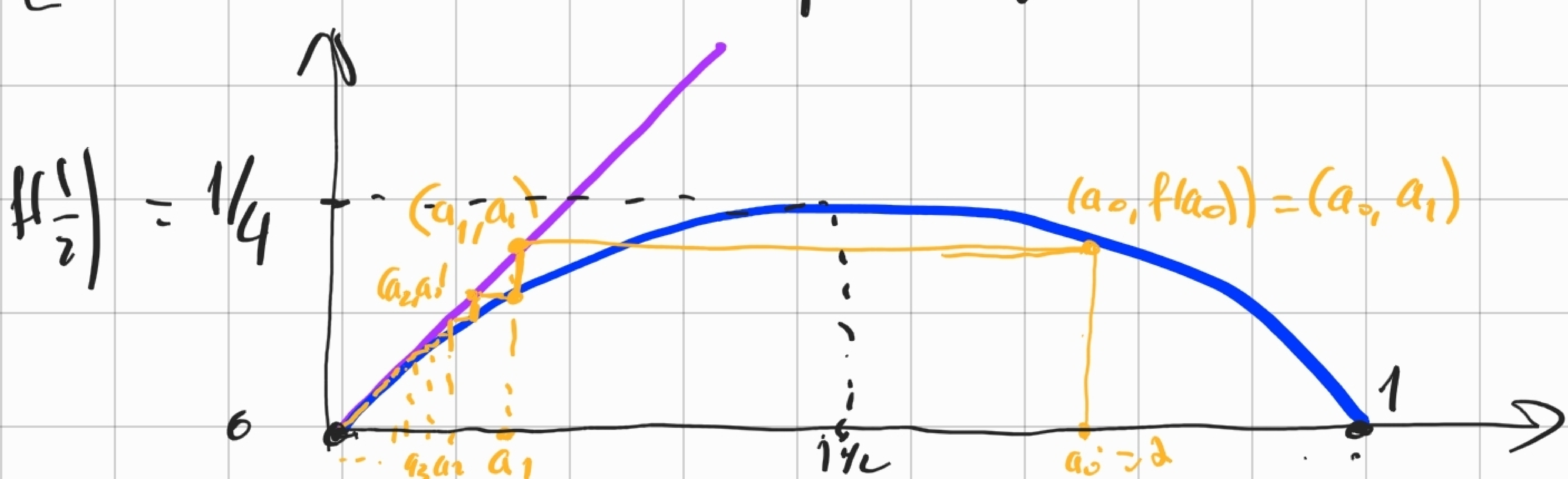
$$f(x) = x$$

$$x - x^2 = x$$

$$-x^2 = 0$$

$$x = 0$$

(1) Se $a_n$ converge, $a_n \to l$, se $f$ continua allora $l$ è un punto fisso.



Congettura: se $\alpha \in [0,1] \Rightarrow a_n \to 0$, $a_n$ decrescente

se $\alpha \notin [0,1] \Rightarrow a_n \to -\infty$

Dimostriamolo!

$I = [0,1]$ è invariante

se $x \in [0,1] \Rightarrow f(x) \in [0, \frac{1}{4}] \subseteq [0,1]$

[Oss A è invariante se $x \in A \Rightarrow f(x) \in A$

ovvero $f(A) \subseteq A$.]

$$f([0,1]) = [0, \tfrac{1}{4}] \subseteq [0,1].$$

Se $\alpha \in I$, $I$ invariante, $a_n \in I$ $\forall n$.

$f(x) \leq x \iff x - x^2 \leq x \iff -x^2 \leq 0$ ✓

$a_{n+1} = f(a_n) \leq a_n$ $a_n$ decrescente (qualunque sia $a_0 = \alpha$)

$a_n$ monotona $\Rightarrow$ $a_n$ ha limite

$a_n \to \ell$ $a_n \in [0,1]$

$\Rightarrow \ell \in [0,1]$

$a_n$ converge $\Rightarrow$ $l$ è un punto fisso
$l=0$

$a_n \to 0$ ✓ (se $\alpha \in [0,1)$)

---

Se $\alpha < 0$.

$a_n$ decrescente $a_n \to l$

$$l \leq a_0 = \alpha < 0$$

$a_n$ non può convergere perché se converge $l=0$.

$\Rightarrow a_n \to -\infty$

[ Moralmente $f(x) = x - x^2$ $\quad x \to \pm\infty$ $\quad f(x) \to -\infty$ ]
[ $-\infty$ è un punto fisso ]

---

$\alpha > 1$ Se $x > 0 \Rightarrow f(x) < 0$

$a_0 = \alpha$, $a_1 < 0$ ritorno al caso precedente

$a_n \longrightarrow -\infty$.

$I_0 = [0, 1]$ è invariante

$0$ ——— $1$

$I_1 = (-\infty, 0)$ è invariante

$-\infty$

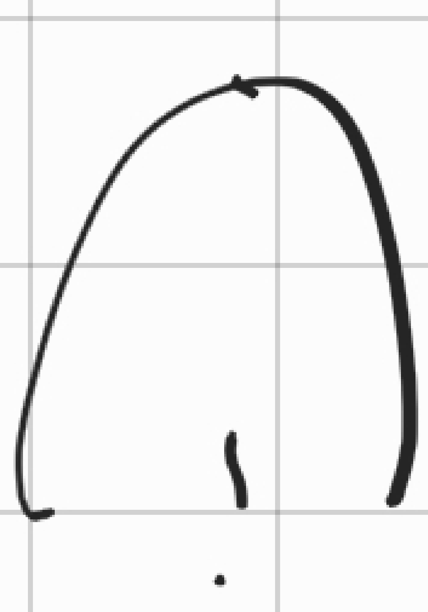
$I_2 = (1, +\infty)$

$f(x) = ax^2 + bx + c$

$-\frac{b}{2a}$

se $a > 0$ $\begin{cases} f \text{ è strettamente decrescente per } x \le -\frac{b}{a} \\ f \text{ è strettamente crescente per } x \ge -\frac{b}{2a} \end{cases}$

$-\frac{b}{2a}$



se $a < 0$ . . . . . .

Esercizio Si consideri la successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_0 = \alpha \\ a_{n+1} = 4a_n - 2 - a_n^2 \end{cases}$$

Si determini, se esiste, il limite di $a_n$ nei casi:

(i) $\alpha = \frac{3}{2}$ (ii) $\alpha = \frac{1}{2}$ (iii) $\alpha = \frac{5}{2}$

(iv) $\alpha = \frac{7}{2}$

---

$$f(x) = 4x - 2 - x^2$$

$$a_{n+1} = f(a_n)$$

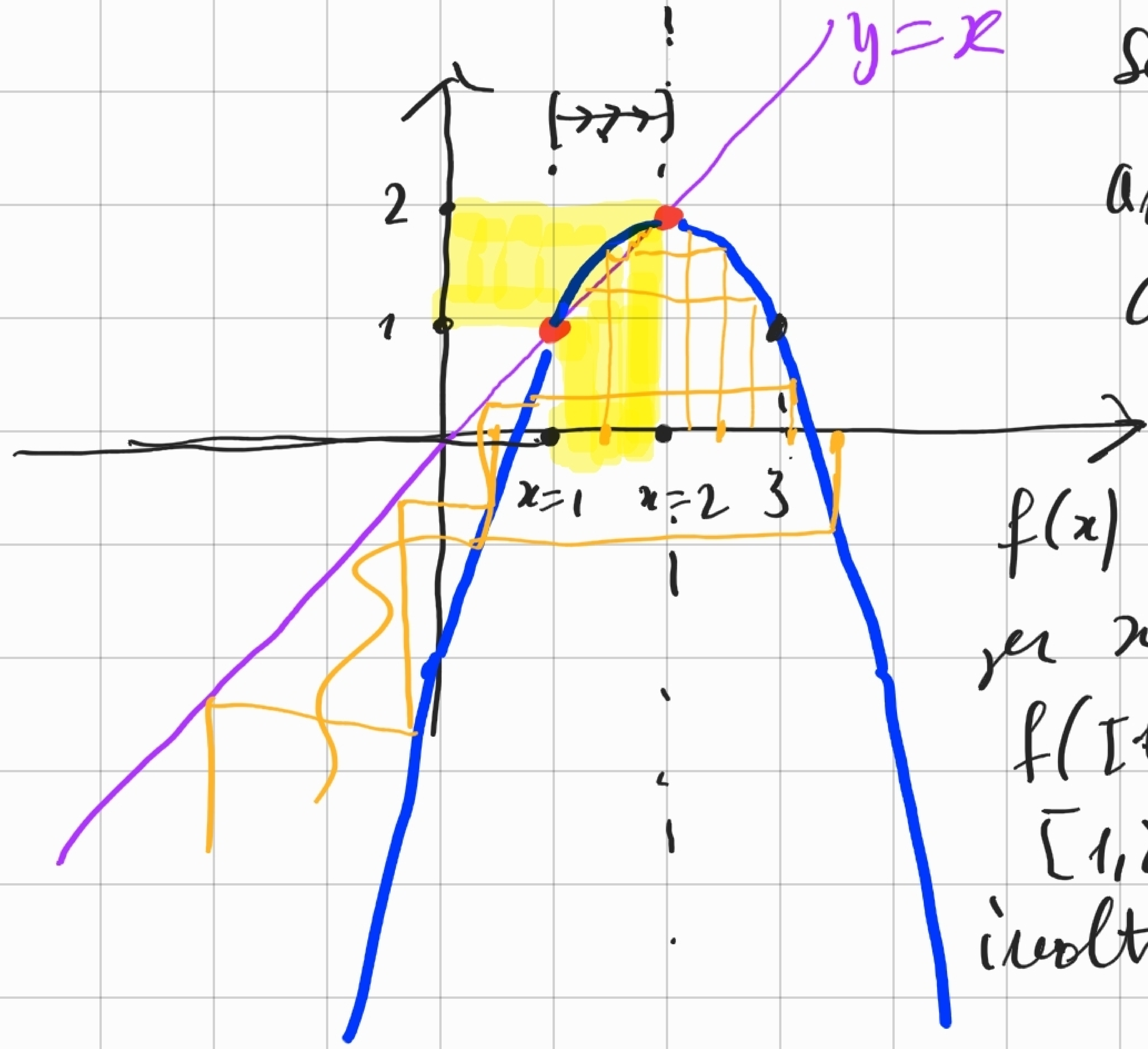
Troviamo i punti fissi:

$$4x - 2 - x^2 = x$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

$$(x-2)(x-1) = 0$$

$x_1 = 1$, $x_2 = 2$ sono i punti fissi




Se $\alpha \in (1,2]$

$a_n$ crescente,

$a_n \to 2$

$f(x)$ è crescente

per $x \le 2$

$f([1,2]) = [1,2]$

$[1,2]$ invariante.

inoltre $f(x) \ge x$

<u>Osservazione</u> se $I = [a,b]$ $\left( \text{o } (a,b) \right)$

$$a \le x \le b$$

se a pto fisso? $\quad \Downarrow$ se $f$ è crescente

$$f(a) \le f(x) \le f(b)$$

$$a \le x \le b$$

se $f$ decrescente

$$f(b) \le f(x) \le f(a)$$

$[1,2]$ invariante $\alpha \in [1,2]$

$\forall n : a_n \in [1,2]$

$f(x) \geq x$ su $[0,1]$ $\Downarrow$

$\Rightarrow a_n$ è crescente.

$\exists\, a_n \to \ell.$ $\qquad \ell \in [1,2]$

$\ell$ è un punto fisso.

$\ell = 0$ o $\ell = 1$

$$\begin{bmatrix} a_{n+1} = f(a_n) \\ \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ \ell \qquad\quad f(\ell) \end{bmatrix}$$

$a_n \geq \alpha = a_0$ perché $a_n$ crescente

$\ell \geq \alpha.$

se $\alpha = \frac{3}{2}$ escludo $\ell = 1.$

quindi $\ell = 2$ ✓

$a_n \to 2$ se $\alpha \in (1,2]$

$a_n \equiv 1.$ se $\alpha = 1$

se $\alpha < 1$ $\quad a_n \to -\infty$ (congettura)

dim:

$(-\infty, 1)$ è invariante

$x < 1 \Rightarrow f(x) < f(1) = 1$

(f strett. crescente per $x \leq 2$.)

$\boxed{f(x) < x}$ se $x < 1$

$\alpha < 1 \Rightarrow a_n < 1 \quad \forall n$

$a_{n+1} = f(a_n) < a_n. \quad \forall n$

$a_n$ decrescente, $a_n \to l$

$l \leq a_0 = \alpha < 1$

$l$ non è finito (non ci sono punti fissi $< 1$). $l = -\infty.$

$\square$

(iii) $\alpha = \frac{5}{2}$ $f(\alpha) = f\left(\frac{3}{2}\right)$ a

mi riconduco al caso (i)

$a_n \to 2$.

In generale se $\alpha \in [2,3]$

$$f(\alpha) \in [1,2]$$

oppure $f$ è decrescente se $x \geq 2$

$$2 \leq x \leq 3$$

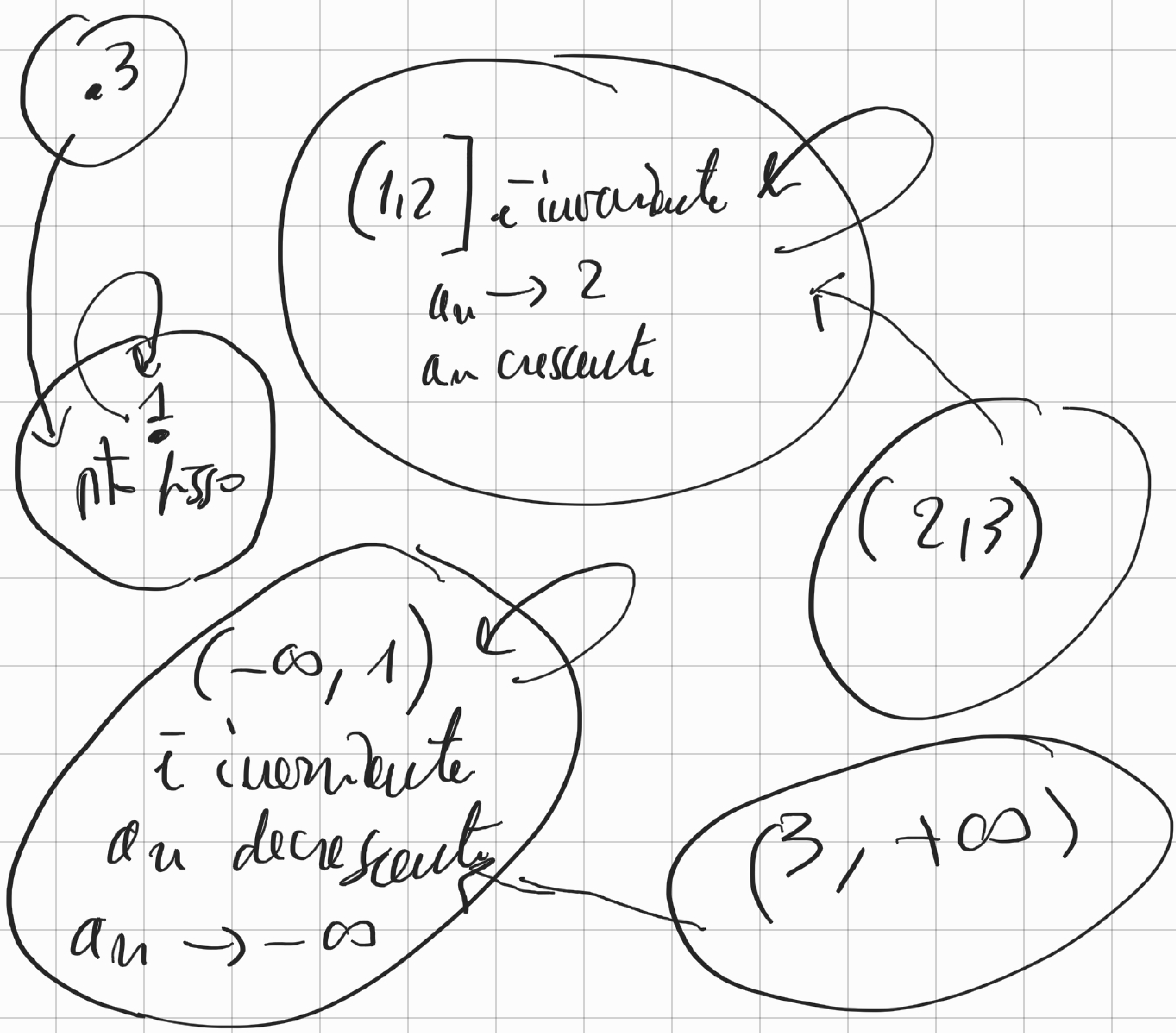
$$\underset{\substack{\parallel \\ 1}}{f(3)} \leq f(x) \leq \underset{\substack{\parallel \\ 2}}{f(2)}$$

$$f([2,3]) \subseteq [1,2].$$

(iv) se $\alpha > 3 \Rightarrow f(\alpha) < 1 \Rightarrow a_n \to -\infty$
(caso ii)

$$\boxed{f \text{ è decrescente se } x \geq 2}$$

$$x > 3$$
$$\Downarrow$$
$$f(x) < f(3) = 1 \qquad \square$$



Esempio (rapporto dei termini consecutivi della successione di Fibonacci)

[video: Abate / Vihart]

$$\begin{cases} F_0 = 0 \quad F_2 = 1 \\ F_1 = 1 \\ F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \end{cases} \quad \Bigg| \quad a_n = \frac{F_{n+2}}{F_{n+1}}$$

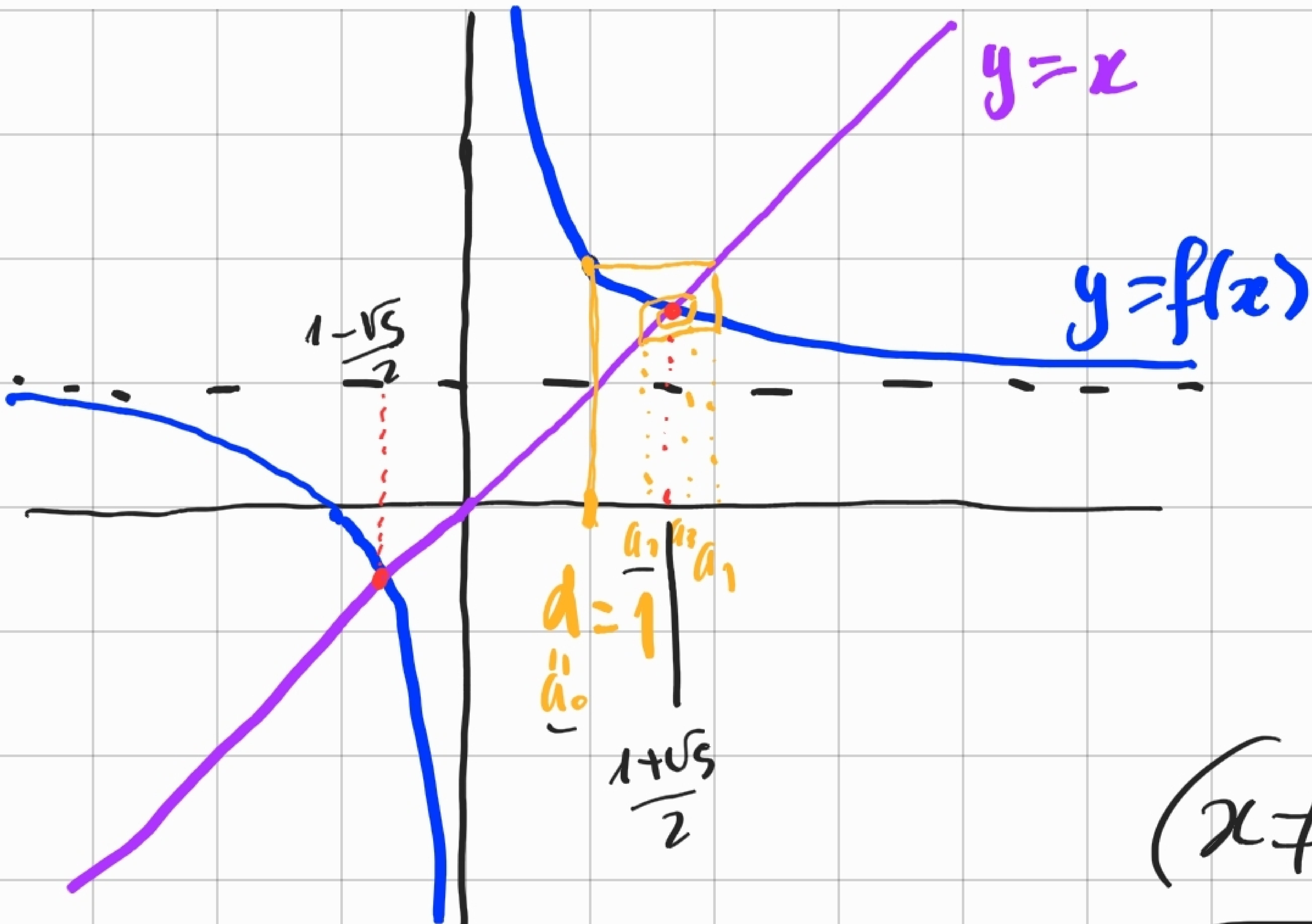
$$\begin{cases} a_0 = \dfrac{F_2}{F_1} = \dfrac{1}{1} = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{F_{n+3}}{F_{n+2}} = \dfrac{F_{n+1} + F_{n+2}}{F_{n+2}} = \dfrac{F_{n+1}}{F_{n+2}} + 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{a_n} + 1$$

---

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{a_n} \end{cases} \leftarrow$$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{x}$$




$(x \neq 0)$

Trovo i punti fissi: $f(x) = x$

$$1 + \frac{1}{x} = x \qquad x + 1 = x^2$$

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad x_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\boxed{\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}}$$

$(0, +\infty)$ è invariante

$$x > 0 \Rightarrow f(x) = 1 + \frac{1}{x} > 1 > 0$$

$\alpha = 1 > 0 \implies a_n > 0 \ \forall n.$

$f$ è decrescente su $(0, +\infty)$.

<u>Teorema</u> Se $I$ è invariante per $f$, $\alpha \in I$ ($\implies a_n \in I \ \forall n$).

(i) se $f$ è <u>crescente</u> su $I$ allora $a_n$ è <u>monotona</u>

<u>dim</u>

Se $\underline{a_1 \geq a_0}$

Se $\underline{a_1 \leq a_0}$

per induzione

$$\underline{a_{n+1} \geq a_n}$$
$$\Downarrow \quad f \text{ crescente}$$
$$f(a_{n+1}) \geq f(a_n)$$
$$a_{n+2} = f(a_{n+1}), \quad a_{n+1} = f(a_n)$$

$$a_{n+1} \leq a_n$$
$$\Downarrow \quad f \text{ crescente}$$
$$f(a_{n+1}) \leq f(a_n)$$
$$a_{n+2} = f(a_{n+1}), \quad a_{n+1} = f(a_n)$$

$$\boxed{a_{n+1} = f(a_n)}$$

(ii) se $f$ è decrescente su $I$:

allora $a_{2n}$ e $a_{2n+1}$ sono

monotone.

<u>dim</u> $a_{2n+2} = f(a_{2n+1}) = f(f(a_{2n}))$

$$a_{2n+2} = f(f(a_{2n}))$$

$f$ decrescente $\Rightarrow f \circ f$ è crescente.

$$a_{2n+3} = f(f(a_{2n+1})). \qquad \square$$

---

<u>Torniamo all'esercizio</u>

$f$ decrescente in $(0,+\infty)$ invariante

$a_{2n}$ monotona $\qquad a_{2n+1}$ monotona

$a_0 = 1 \qquad a_1 = 1 + \frac{1}{1} = 2$

$a_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \qquad a_3 = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{5}{3}$

$a_{2n}$ crescente, $a_{2n+1}$ decrescente

$$\underbrace{a_{2n}}\longrightarrow \ell \qquad\qquad \underbrace{a_{2n+1}}\longrightarrow \ell'$$

$\ell$ e $\ell'$ potrebbero essere punti fissi di $f \circ f$.

$$a_{2(n+1)} = a_{2n+2} = f(f(a_{2n}))$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$\ell = f(f(\ell))$$

$$f(f(x)) = x$$

$\boxed{\text{$f \circ f$ potrebbe avere più punti fissi di $f$.}}$

$$f(f(x)) = 1 + \frac{1}{f(x)} = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$$

$$1 + \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = x$$

$$1 + \frac{x}{x+1} = x$$

$$\frac{x+1+x}{x+1} = x$$

$$2x+1 = x(x+1)$$

$$x^2 + x = 2x+1$$

$$x^2 - x - 1 = 0$$

ho le stesse soluzioni di prima

$\ell, \ell' \neq +\infty \qquad \ell, \ell' \neq 0$

$$\ell = \ell' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

---

$$\left.\begin{aligned} a_{2n} &\to \frac{1+\sqrt{5}}{2} \\ a_{2n+1} &\to \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{aligned}\right\} \quad a_n \to \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

---

STRATEGIA ALTERNATIVA

Se voglio dimostrare

$$a_n \to \ell$$

$$b_n = \underline{a_n - \ell}$$

$$b_n \to 0$$

---