ANALISI MATEMATICA B
LEZIONE 3 - 28.9.2020

3) Se vale $\underbrace{(P \vee Q) \wedge (R \vee Q)}$ $= X$

allora possiamo dedurre:

Q, $P \wedge R$, $R \Rightarrow Q$, $\underbrace{(\neg Q) \Rightarrow R}_{Y}$

$$\boxed{(\neg Q) \Rightarrow (R \wedge P)}$$

$$R \wedge P \Rightarrow R$$

P	Q	R	$P \vee Q$	$R \vee Q$	X	$\overset{Y}{\neg Q \Rightarrow R}$
F	F	V	F	V	F	V

$$X \Rightarrow Y$$

4) $\neg(P \Rightarrow Q)$

è equivalente a

$P \land \neg Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$\neg(P \Rightarrow Q)$	$P \land \neg Q$
F	F	V	F	F
F	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	V	V	F	F

Predicati

variabili libere

$P(x)$ es: $x > 7$

$P(x,y)$ es: $x > y$

Quantificatori logici:

universale

$\underline{\forall x : P(x)}$ $\vee$ $P(x)$ è vera qualunque sia x

esistenziale

$\underline{\exists x : P(x)}$ $\vee$ $P(x)$ è vera per almeno un valore di x

chiusa

libera

non dipende da x (è una proposizione)

$P(x,y)$ è un predicato in due variabili.

libere

$Q(y): \quad \exists x : P(x, y)$ libera

chiusa

$R : \quad \forall y : \exists x : P(x, y)$ chiuse entrambe

Es. $\quad x > y \qquad P(x,y)$

$Q(y): \quad \exists x : x > y \qquad \exists x : P(x,y)$

$R: \quad \forall y : \exists x : x > y$ proposizione (vera in $\mathbb{N}$)

Negazione di un quantificatore

$$\neg \forall x : P(x) \iff \exists x : \neg P(x)$$

$$\neg \exists x : P(x) \iff \forall x : \neg P(x)$$

"$\neg \exists = \forall \neg$"

"$\neg \forall = \exists \neg$"

$$\forall \exists \overset{?}{=} \exists \forall$$

Es 1) $\forall x : \exists y : \quad x+2=y$ V

2) $\exists y : \forall x : \quad x+2=y$ F

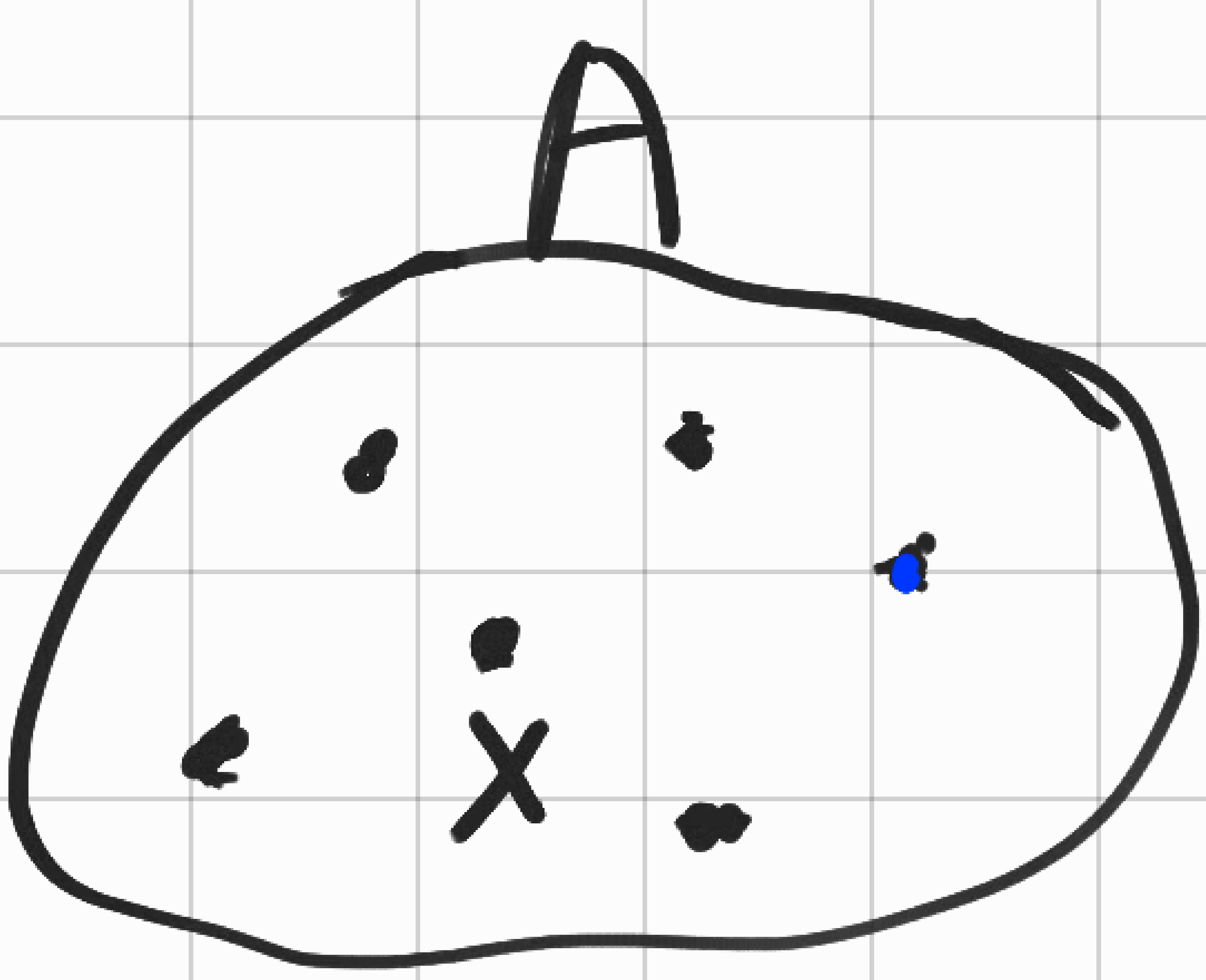
$$\forall x : P(x) \Rightarrow \exists x : P(x)$$

TEORIA DEGLI INSIEMI

Predicati: $\boxed{x \in A}$ $\quad$ $\in$ essere

appartiene

$\|$ è un elemento di A



$$\neg \exists = \nexists$$

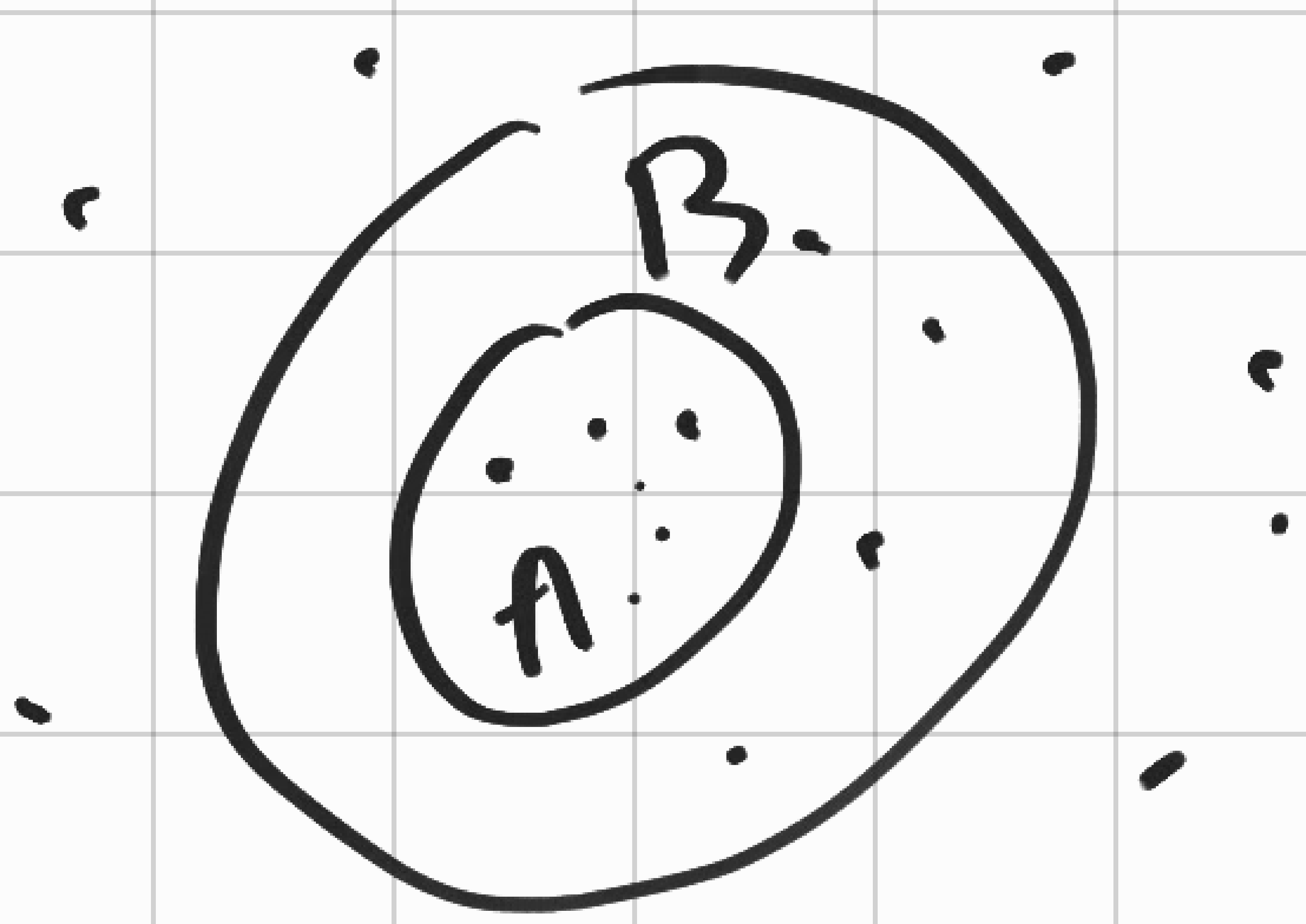
Assiomi. $\exists y : \neg \exists x : x \in y$.

y è l'insieme vuoto.
Usiamo il simbolo $\emptyset$ per denotare tale insieme y (insieme vuoto)

Inclusione tra insiemi e uguaglianza

contenuto

Diremo che A è incluso in B e scriveremo $\underline{A \subseteq B}$ se



$$\forall x: x \in A \Rightarrow x \in B.$$

$$A \supseteq B \qquad (B \subseteq A)$$

$$\forall x: x \in A \Leftarrow x \in B$$

$$A = B: \quad \forall x: x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

$$(A = B) \Leftrightarrow (A \subseteq B \wedge B \subseteq A).$$

Esercizio se A vuoto e B vuoto allora $A = B$.

$$\neg \exists x : x \in A \wedge \neg \exists y : y \in B$$

$$\forall x : \neg (x \in A) \wedge \forall y : \neg (y \in B)$$

$$\underset{F}{x \in A} \overset{?}{\Leftrightarrow} \underset{F}{x \in B}$$

L'insieme vuoto è unico.

Es

Laika $\in$ cani

Laika $\in$ animali

cani $\subseteq$ animali

Il cane è un animale

$$C \subseteq A$$

Questo cane è un animale

$$c \in A$$

$C \in S$ $\qquad$ S specie

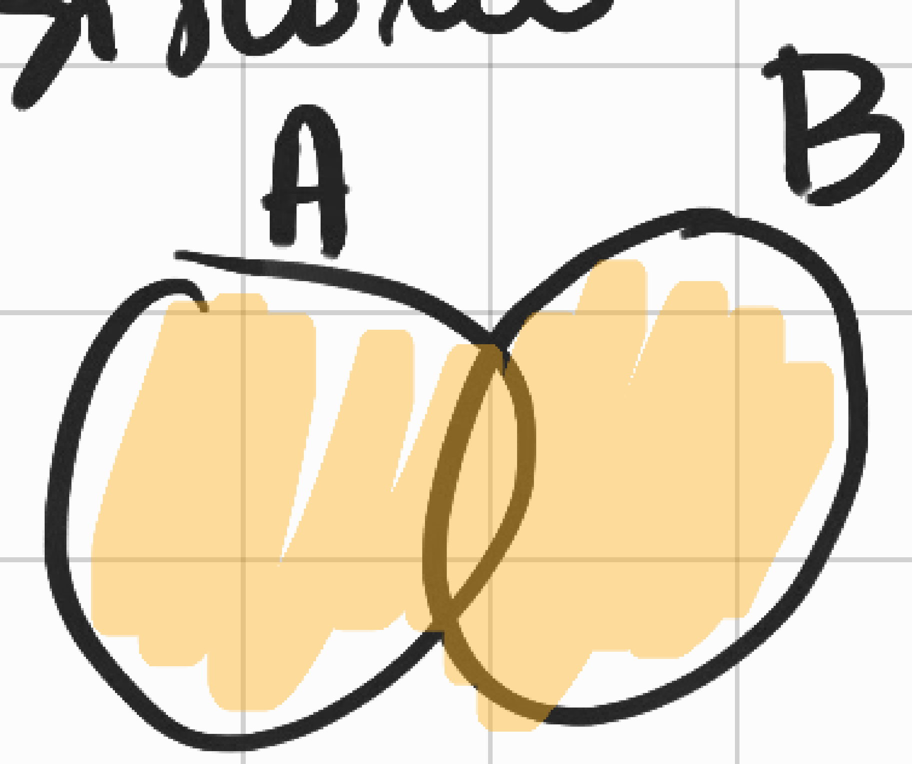
Il cane è una specie di animale.

__Esercizio__ se $x \in A$ e $A \subseteq B$
allora $x \in B$

Operazioni tra insiemi

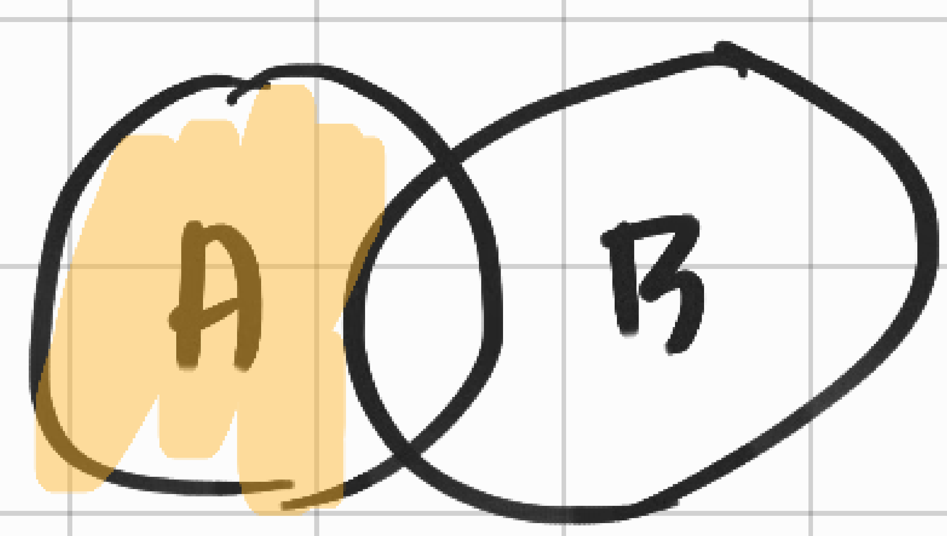
__Assiomi__ dati A, B esistono

$A \cup B$ unione



$A \cap B$ intersezione

$A \setminus B$ differenza



__Definizione:__

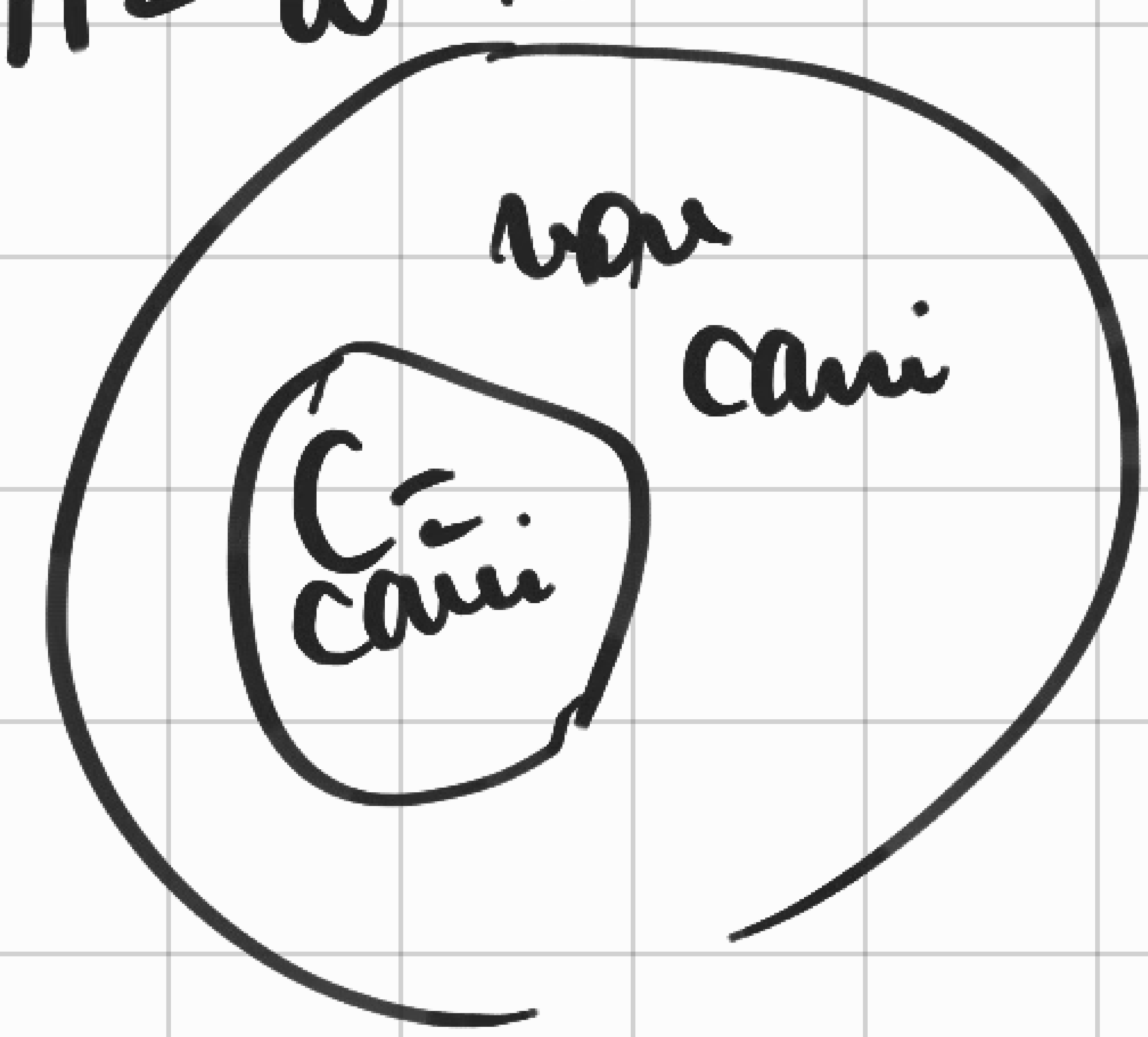
$\underbrace{x \in A \cup B}$ significa $\underline{x \in A \vee x \in B}$

$x \in A \cap B$ significa $x \in A \wedge x \in B$

$x \in A \setminus B$ significa $x \in A \wedge \neg x \in B$.

(Complementare? Vedremo che non può essere definito).

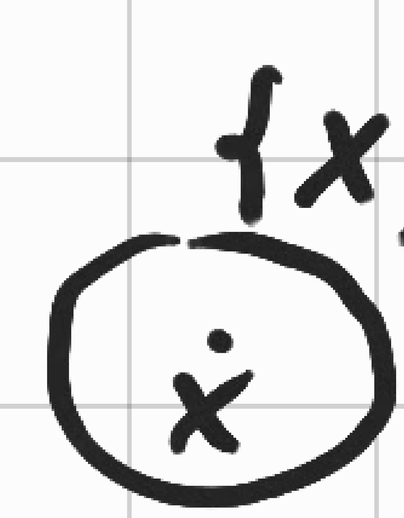
A = animali



$A \setminus C$

Singoletto

Dato x esiste l'insieme $\{x\}$ (singoletto di x) definito dalla proprietà:



$$y \in \{x\} \iff y = x$$

$\underline{x \in \{x\}}$ se $y \neq x$ $y \notin \{x\}$.

$\neg(y = x)$ $\neg(y \in \{x\})$

<u>Nuovi insiemi:</u> $\{\emptyset\} \neq \emptyset$

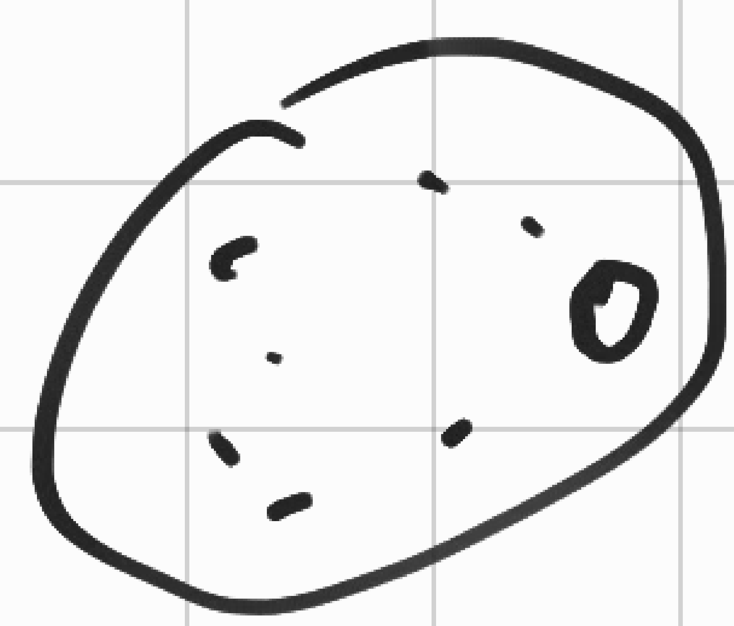
$\emptyset \in \{\emptyset\}$ $\emptyset \notin \emptyset$

Possiamo costruire insiemi con un numero finito di elementi per elencazione:

definiamo

$$\{x, y\} = \{x\} \cup \{y\}$$

- Se $x = y$ $\{x, y\} = \{x\}$ ha un solo elemento.
- $\{y, x\} = \{x, y\}$



<u>Es</u> $\forall A: \emptyset \subseteq A$ perché $x \in \emptyset \Rightarrow x \in A$

Esempio (possibile definizione dei numeri naturali).

$$0 = \emptyset$$
$$1 = \{\emptyset\}$$
$$2 = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$
$$3 = \{0,1,2\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$$
$$\vdots$$

$$n+1 = \{0, 1, \ldots, n\}$$
$$n+1 \neq n$$

ES $2 \neq 1$.

$n < m$ per definizione | $n \in m$

(forse: $n \leq m$ | $n \subseteq m$)

$$10 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

(Idea alternativa: $1 = \{1\} = \{\{1\}\} = \{\{\{1\}\}\}$)

esiste?

(Altra possibilità $0 = \emptyset$ $1 = \{\emptyset\}$ $2 = \{\{\emptyset\}\}$)