ES 1 $\quad f(x) = 4x^3 - 3x^2$

$$\begin{cases} a_{n+1} = f(a_n) \\ a_1 = \alpha \end{cases}$$

~~De~~terminiamo i punti fissi di f:

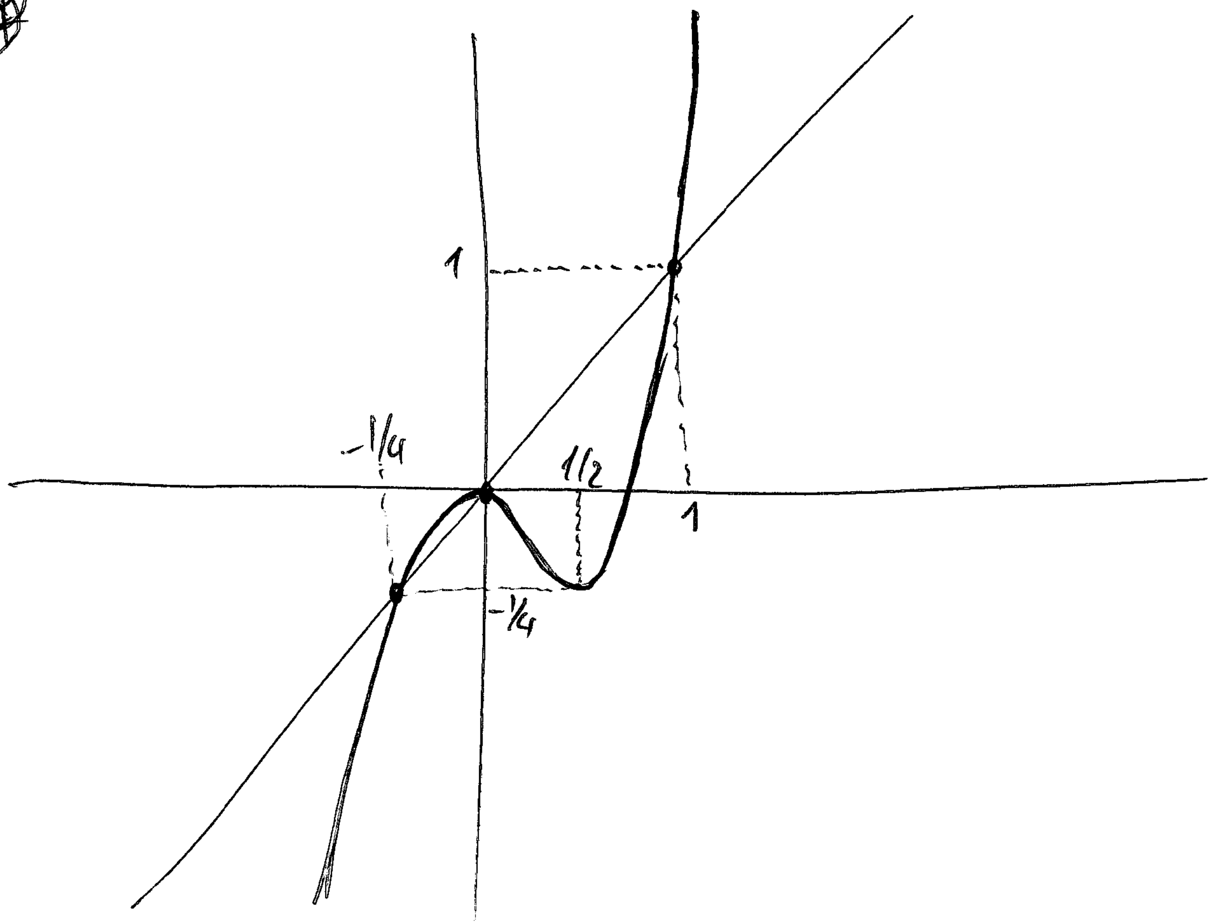
$$4x^3 - 3x^2 = x$$
$$4x^3 - 3x^2 - x = 0$$
$$x(4x^2 - 3x - 1) = 0 \qquad x_0 = 0, \quad x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{25}}{8} = \begin{cases} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{cases}$$

Monotonia di f:

$$f'(x) = 12x^2 - 6x = 6x(2x-1)$$

$$f(0) = 0, \qquad f\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{4}{8} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{4}$$

		0		$\frac{1}{2}$	
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$



(a) l'intervallo $I_1=(1,+\infty)$ è invariante

in quanto $f(1)=1$, $f(x)>x$ per $x>1$.

$\Downarrow$ a_n crescente

$\alpha=2\in I_1 \Rightarrow a_n\in I_1\ \forall n \Rightarrow a_n\to \ell>1$

$\Rightarrow \underline{\underline{\ell=+\infty}}$ (non ci sono punti fissi in $(1,+\infty)$)

(b) l'intervallo $I_2=\left(-\frac{1}{4},0\right]$ è invariante

in quanto $f\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f(0)=0$, f monotona

in $\left(-\frac{1}{4},0\right)$. Dunque $\alpha=-\frac{1}{5}\in I_2 \Rightarrow a_n\in I_2\ \forall n$

Inoltre a_n è crescente in quanto $f(x)>x$ su I_2.

$\Rightarrow a_n\to\ell\in\left(-\frac{1}{5},0\right]$, ℓ deve essere un punto

fisso di f $\Rightarrow \underline{\underline{\ell=0}}$

(c) $\alpha=\frac{1}{4}$, $a_1=\frac{1}{4}$, $a_2=f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{16}-\frac{3}{16}=-\frac{1}{8}$

$a_2=-\frac{1}{8}\in I_2$, si ripete il ragionamento fatto in (b)

$\Rightarrow \underline{\underline{a_n\to 0}}$

(d) $\alpha = \frac{8}{9} \in I_3 = [0,1)$.

L'intervallo I_3 non è invariante. Infatti

$f(I_3) = [-\frac{1}{4}, 1)$

essendo $-\frac{1}{4}$ il minimo di f su I_3

e 1 l'estremo superiore.

Dunque la successione a_n, con $a_1 \in I_3$,

potrebbe uscire da I_3.

Osserviamo che su I_3 si ha $f(x) < x$

dunque la successione a_n è decrescente finché

rimane dentro I_3.

Osservazione: non è possibile che $a_n \in I_3$ $\forall n$.

Infatti in tal caso si avrebbe $a_n \to \ell$, $\ell = 0$,

a_n decrescente.

Ma allora dovrebbe ~~essere $a_n < \frac{1}{2}$ per n abbastanza~~

~~grande e~~ esserci N t.c. $a_N < \frac{1}{2}$

ma allora $a_{N+1} = f(a_N) < 0 \Rightarrow a_{N+1} \notin I_3$.

Dunque esiste N t.c. $a_N \in I_3$, $a_{N+1} \notin I_3$.

Si osserva facilmente che deve essere $a_{N+1} \in [-\frac{1}{4}, 0]$

Osservazione 2: non può essere $a_{N+1} = -\frac{1}{4}$.

Infatti

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = 4\frac{p^3}{q^3} - 3\frac{p^2}{q^2} = \frac{4p^3 - 3p^2 q}{q^3}$$

Se $\frac{p}{q}$ è una frazione con denominatore una potenza di 3 $\Rightarrow$ anche $f\left(\frac{p}{q}\right)$ è una frazione con denominatore potenza di 3.

$a_1 = \frac{8}{9} \Rightarrow a_n = \frac{p_n}{q_n}$ con q_n potenza di 3.

$\Rightarrow a_n \neq -\frac{1}{4} \quad \forall n.$

Dunque $a_{N+1} \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right] = I_2$ e siamo di nuovo nel caso (b) quindi $\underline{\underline{a_n \to 0}}$

2.

$$f(x) = 4x^3 - 18x^2 + 24x$$

$$f'(x) = 12x^2 - 36x + 24$$

$$= 12(x^2 - 3x + 2) = 12(x-1)(x-2)$$

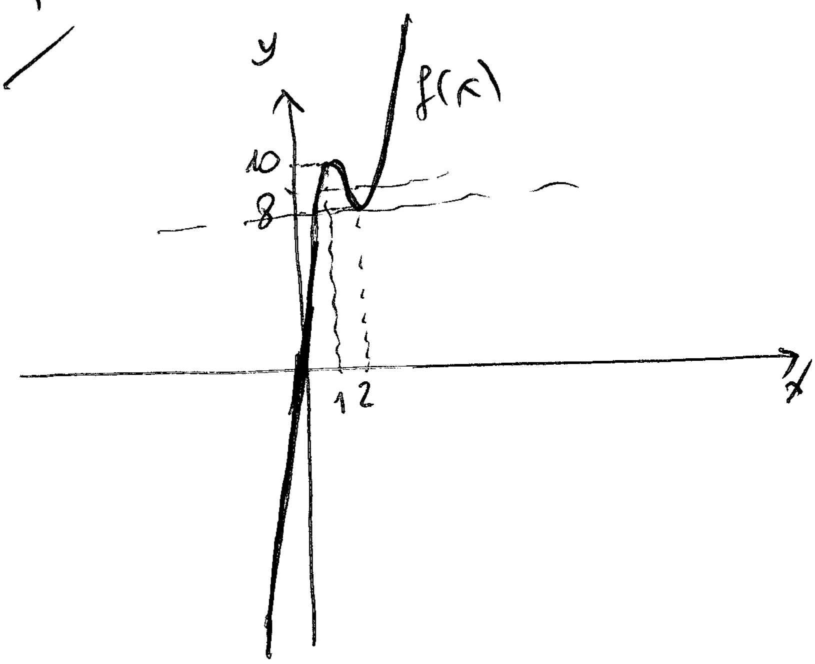
		1		2	
f'	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

$f(1) = 4 - 18 + 24 = 10$

$f(2) = 4\cdot 8 - 18\cdot 4 + 24\cdot 2$

$= 32 - 72 + 48$

$= 8$



(a) per $\alpha < 8$ $f(x) = \alpha$ ha 1 soluzione

per $\alpha = 8$ $f(x) = \alpha$ ha 2 soluzioni

per $8 < \alpha < 10$ $f(x) = \alpha$ ha 3 soluzioni

per $\alpha = 10$ $f(x) = \alpha$ ha 2 soluzioni

per $\alpha > 10$ $f(x) = \alpha$ ha 1 soluzione

(b) ~~Non esistono m, q tali~~
Dati comunque $m, q \in \mathbb{R}$ l'equazione

$$f(x) = mx + q$$

HA soluzione in quanto

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - mx - q = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) - mx - q = -\infty$$

~~Allora~~ Quindi esistono a, b tali che

$$f(b) - mb - q > 0$$
$$f(a) - ma - q < 0$$

dunque su $[a, b]$ si applica il teorema degli zeri.

(c) f su $[0,1]$ è strettamente crescente quindi è iniettiva.

$f(0) = 0$, $f(1) = 10$

quindi è suriettiva su $[0, 10]$ per il teorema dei valori intermedi

Dunque $f:[0,1]\to[0,10]$ è invertibile.

~~[illegible]~~
Osserviamo che $f'(1)=0$, $f'(x)>0$ per $x\in[0,1)$

Dunque g è derivabile in $[0,10)$ per il teorema della fn. inversa e vale

$$g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{12(x^2-3x+2)}$$

Nel punto $x=10$ g non è derivabile in quanto il rapporto incrementale tende a $+\infty$.

$$g'(f(x)) = \frac{1}{9} \iff \frac{1}{12(x^2-3x+2)} = \frac{1}{9}$$

$$\iff 4(x^2-3x+2)=3$$

$$4x^2-12x+5=0$$

$$x_{12} = \frac{6\pm\sqrt{36-20}}{4} = \frac{6\pm 4}{4} = \begin{cases} \frac{5}{2} \\ \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\frac{5}{2}>1$ lo escludo $\Rightarrow$ $\underline{\underline{x=\frac{1}{2}}}$ è la soluzione.

3. $$F(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}(1+t)\,e^{t^2}\,dt$$

Osserviamo che $\displaystyle\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} t e^{t^2}\,dt=0$

in quanto te^{t^2} è dispari e $[-\sqrt{x},\sqrt{x}]$

è un intervallo simmetrico.

Dunque $\displaystyle F(x)=\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt = 2\int_0^{\sqrt{x}} e^{t^2}\,dt$

La funzione integranda $f(x)=e^{x^2}$ è continua su tutto $\mathbb{R}$ $\Rightarrow$ integrabile su qualunque intervallo.

Deve essere $x\geq 0$ perché $\sqrt{x}$ sia definita.

Dominio di $F(x)$: $x\geq 0$.

Posto $G(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ si ha $G'(x)=f(x)=e^{x^2}$

e $F(x)=2G(\sqrt{x})$ per $x>0$ si ha dunque:

$$\Rightarrow F'(x)=\cancel{2}\,G'(\sqrt{x})\cdot\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}=\frac{e^x}{\sqrt{x}}.$$

Per $x\to 0$ si ha $F'(x)\to+\infty$ e per l'Hôpital:

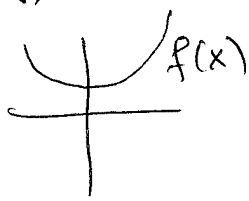
$\cancel{\lim_{h\to 0}\frac{F(h)-F(0)}{h}=\lim_{h\to 0}}$ F non è derivabile in $x=0$.

$F'(x)>0 \quad \forall\, x>0$

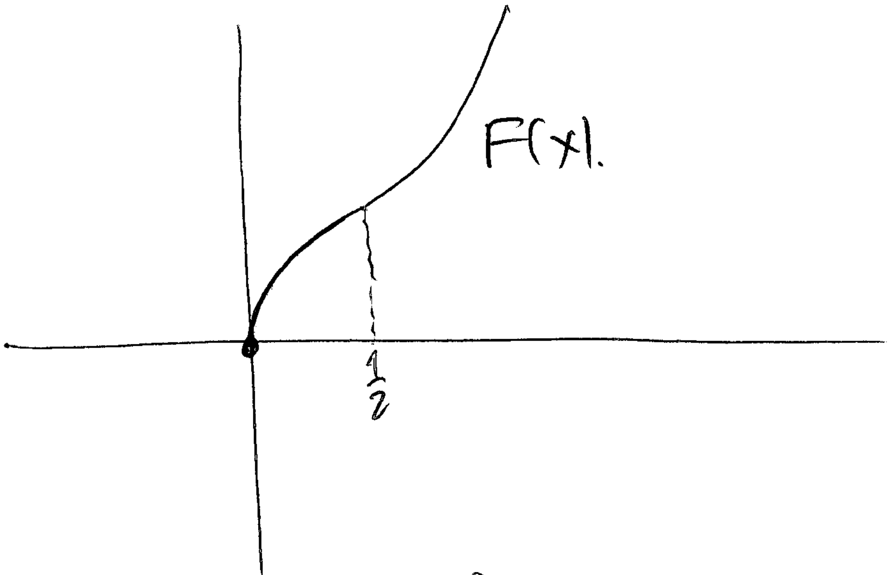
$\Rightarrow$ F è strettamente crescente su tutto $[0,+\infty)$

Per $x>0$

$$F''(x) = \frac{e^x\sqrt{x} - e^x\frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{e^x[2x-1]}{2x\sqrt{x}}$$



$F''(x)>0$ per $x>\frac{1}{2}$



F è convessa su $[\frac{1}{2},+\infty)$.

4 - $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt[n]{2} - 1)$

$\sqrt[n]{2} - 1 = 2^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\lg 2} - 1$

$e^x = 1 + x + o(x)$

$\sqrt[n]{2} - 1 = e^{\frac{\lg 2}{n}} - 1 = \frac{\lg 2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$

$\Rightarrow \; |a_n| \sim \frac{\lg 2}{n}$

$\Rightarrow$ la serie <u>non</u> converge assolutamente.

Si applica il criterio di Leibniz?

$\sqrt[n]{2}$ è decrescente $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{2} - 1$ è decrescente

$\sqrt[n]{2} \to 1$ $\Rightarrow$ $\sqrt[n]{2} - 1$ è infinitesima

$\Rightarrow$ la serie <u>converge</u> per Leibniz.