

Analisi Matematica 2

Prova scritta preliminare n. 3

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2009-2010

10 maggio 2010

1. Studiare la soluzione massimale del problema di Cauchy:

$$\begin{cases} y' = \log(x + y^2), \\ y(1) = 0. \end{cases}$$

In particolare dimostrare che:

(a) la soluzione è definita per ogni $x \in \mathbb{R}$;

(b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{\sqrt{-x}} = 1$;

(c) $y(x)$ è convessa per $x > 1$.

2. Calcolare

$$\int_{\gamma} (7x^6 - 3y^2) dx - 6xy dy$$

sulla curva

$$\gamma(t) = (\cos(3t), \sin^2 t), \quad t \in [0, \pi/2].$$

3. Calcolare

$$\int_{\gamma} \frac{(x - y) dx + (x + y) dy}{x^2 + y^2}$$

sulla curva

$$\gamma(t) = ((2 + \cos t) \cos(2t), (2 + \cos t) \sin(2t)), \quad t \in [0, 2\pi].$$

4. Si consideri l'insieme D di \mathbb{R}^2

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, 2x \leq y + x^2 \leq 1 + x^2\}.$$

(a) Verificare che $D \neq \emptyset$;

(b) Calcolare l'integrale doppio

$$\iint_D \frac{4}{(y + 3)^2} dx dy.$$