Analisi Matematica IV modulo
Soluzioni prova scritta preliminare n. 2

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2005-2006

22 maggio 2006

1. Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\gamma \omega$ della forma differenziale
$$\omega = \frac{-2xy^2\,dx + 2x^2y\,dy}{x^4+y^4}$$
sulla curva
$$\gamma(t) = (t^4 - t^3, t^3 - 3t - 2), \qquad t \in [0,2].$$

Soluzione. La forma differenziale ω è definita sull'aperto $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Si verifica facilmente che la forma differenziale è chiusa. Proviamo allora a trovare una primitiva:
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2xy^2}{x^4+y^4}, \qquad \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2x^2y}{x^4+y^4}.$$
Supponendo $y \neq 0$ si ottiene (dalla prima equazione):
$$F = \int \frac{-2xy^2}{x^4+y^4}\,dx = \int \frac{-\frac{2}{y^2}x}{1+\left(\frac{x^2}{y^2}\right)^2}\,dx = -\operatorname{arctg}\frac{x^2}{y^2} + c(y).$$
Derivando rispetto a y si trova facilmente $c'(y) = 0$ e quindi una primitiva, per $y \neq 0$ è data da
$$F(x,y) = -\operatorname{arctg}\frac{x^2}{y^2}.$$
Osserviamo che per $y \to 0$ la funzione F tende a $-\pi/2$, possiamo quindi estenderla per continuità a tutto Ω:
$$F(x,y) = \begin{cases} -\operatorname{arctg}\frac{x^2}{y^2} & \text{se } y \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{se } y = 0. \end{cases}$$
Questa funzione risulta essere continua e differenziabile su Ω (basta osservare che per $x, y \neq 0$ si ha $-\operatorname{arctg}(x^2/y^2) = \operatorname{arctg}(y^2/x^2) - \pi/2$) e si ha $\omega = F_x\,dx + F_y\,dy$.

Dunque ω è una forma differenziale esatta e si ha
$$\int_\gamma \omega = F(\gamma(2)) - F(\gamma(0)) = F(8,0) - F(0,-2) = -\frac{\pi}{2} - 0 = -\frac{\pi}{2}.$$

2. Calcolare l'integrale doppio
$$\iint_D y\,dx\,dy$$

esteso al dominio

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon x \geq 1,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 2\right\}.$$

Soluzione. Risolviamo l'integrale utilizzando le coordinate polari: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$, $dx\,dy = \rho\,d\rho d\theta$. Il dominio D diventa

$$D' = \{(\rho, \theta) \colon \theta \in [0, \pi/4],\ \frac{1}{\cos\theta} \leq \rho \leq \sqrt{2}\}.$$

Dunque si ha

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dxdy &= \iint_{D'} \rho^2 \sin\theta\,d\rho d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \int_{\frac{1}{\cos\theta}}^{\sqrt{2}} \rho^2\,d\rho d\theta \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \left[\frac{\rho^3}{3}\right]_{\frac{1}{\cos\theta}}^{1} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\cos^3\theta}\right) d\theta \\
&= \left[-\frac{2\sqrt{2}}{3}\cos\theta - \frac{1}{6\cos^2\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{6} \\
&= \frac{4\sqrt{2} - 5}{6}.
\end{aligned}$$

3. Dopo averla disegnata, calcolare l'area della regione di piano racchiusa dalla curva

$$\gamma(t) = (\sin(2t), \sin t), \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione. Si osserva che la curva percorre una figura a forma di '8'. In particolare nel tratto $t \in [0, \pi]$ la curva è percorsa in senso antiorario mentre per $t \in [\pi, 2\pi]$ la curva è percorsa in senso orario. L'area della regione racchiusa, per simmetria, sarà due volte l'area della parte superiore. Per calcolare l'area complessiva possiamo dunque integrare la forma differenziale $x\,dy$ sul tratto di curva $t \in [0, \pi]$ e moltiplicare il risultato per due:

$$2\int_0^{\pi} x\,dy = 2\int_0^{\pi} \sin(2t)\cos t\,dt = 4\int_0^{\pi} \sin t \cos^2 t\,dt = -4\left[\frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = \frac{8}{3}.$$