Analisi Matematica I e II modulo
Prova scritta n. 1

Corso di laurea in Matematica, a.a. 2002-2003

10 giugno 2003

1. Studiare la seguente funzione e disegnarne il grafico

$$f(x) = \frac{x}{e^{\frac{3}{x}}}.$$

Soluzione. La funzione è ben definita per $x \neq 0$. Per quanto riguarda il comportamento della funzione agli estremi del dominio si verifica facilmente che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 0.$$

Inoltre per $x \to \pm\infty$ la funzione ha l'asintoto obliquo $y = x - 3$ in quanto

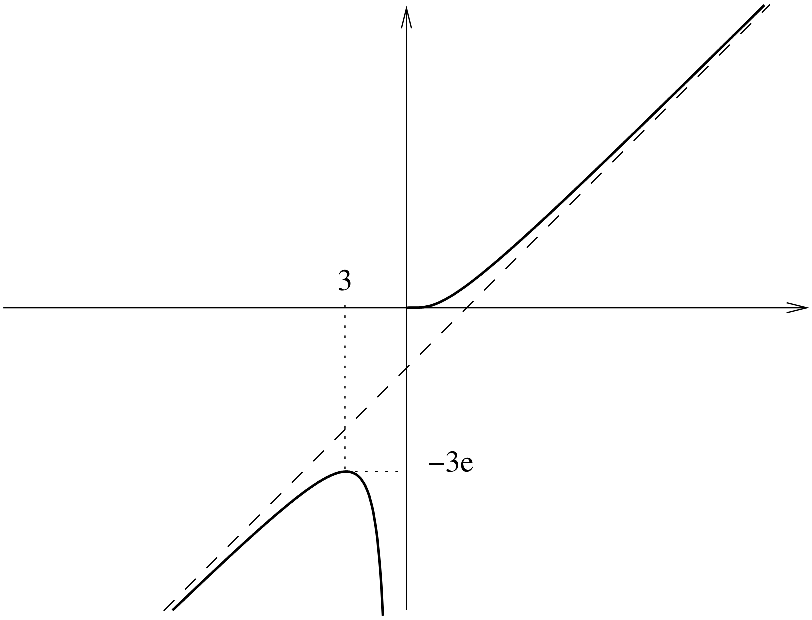
$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) - x = 3.$$

Si ha

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{3}{x}}{e^{\frac{3}{x}}}, \quad f''(x) = \frac{9}{x^3 e^{\frac{3}{x}}}.$$

Si trova quindi facilmente che f è positiva per $x > 0$, negativa per $x < 0$, è crescente per $x \leq -3$, ha un massimo relativo in $x = -3$ (con valore $f(3) = -3e$), è decrescente per $-3 \leq x < 0$ ed è di nuovo crescente per $x > 0$. Inoltre f è convessa per $x > 0$ e concava per $x < 0$.

Il grafico di f può dunque essere rappresentato come segue:



2. Studiare la seguente successione definita per ricorrenza

$$\begin{cases} a_1 = 0, \\ \\ a_{n+1} = a_n^2 + \frac{6}{25}. \end{cases}$$

Soluzione. Innanzitutto notiamo che se $a_n \to \ell$ e $\ell \in \mathbb{R}$ allora, passando al limite per $n \to \infty$ nella formula di ricorrenza si ottiene $\ell = \ell^2 + \frac{6}{25}$ cioè o $\ell = \frac{2}{5}$ o $\ell = \frac{3}{5}$.

Proviamo a dimostrare che la successione è crescente. La condizione $a_{n+1} \geq a_n$ è equivalente a $a_n^2 + \frac{6}{25} \geq a_n$ che è valida se $a_n \leq \frac{2}{5}$ (oltre che per $a_n \geq \frac{3}{5}$).

Sarà dunque sufficiente mostrare che effettivamente $a_n \leq \frac{2}{5}$ per ogni n. Lo dimostriamo per induzione. Chiaramente $a_1 = 0 \leq \frac{2}{5}$ quindi la base dell'induzione $n = 1$ è verificata. Dimostriamo che se $a_n \leq \frac{2}{5}$ allora anche $a_{n+1} \leq \frac{2}{5}$. Quest'ultima disequazione si può riscrivere come $a_n^2 + \frac{6}{25} \leq \frac{2}{5}$ ovvero $a_n^2 \leq \frac{4}{25}$ che effettivamente è verificata se $a_n \leq \frac{2}{5}$.

Abbiamo dimostrato che la successione è monotona crescente ed è limitata. Dunque la successione converge ad un valore finito che, per quanto visto prima, deve essere uno dei valori $\frac{2}{5}$ o $\frac{3}{5}$. Ma essendo $\forall n, a_n \leq \frac{2}{5}$ il limite non può che essere $\frac{2}{5}$.

3. Calcolare l'integrale definito

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2+x)(2-|x|)}\, dx.$$

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{(2+x)(2-|x|)}\,dx &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{(2+x)^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{(2+x)(2-x)}\,dx \\
&= \left[\frac{-1}{2+x}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{2+x} + \frac{1}{2-x}\,dx \\
&= -\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{4}[\,\log(2+x) - \log(2-x)]_0^1 \\
&= -\frac{1}{2} + \frac{1}{4}(\log 3 - \log 1 - \log 2 + \log 2) = \frac{1}{4}\log 3 - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

4. Stabilire il carattere della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\sqrt[3]{n^3+1} - n\right)$$

Soluzione. Ricordando che per $x \to 0$ si ha $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + o(x)$ si ha, per $n \to +\infty$,

$$\sqrt[3]{n^3+1} - n = n\left[\left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{\frac{1}{3}} - 1\right] = n\left[\frac{1}{3}\frac{1}{n^3} + o(1/n^3)\right] = \frac{1}{3}\frac{1}{n^2} + o(\frac{1}{n^2}).$$

In particolare $\lim_{n\to\infty} n^2 a_n = \frac{1}{3}$ (dove a_n è il termine generico della serie in questione) e quindi, per il criterio degli infinitesimi, la serie data ha lo stesso carattere della serie $\sum \frac{1}{n^2}$ cioè converge.